partition nœudienne d'un entier, et confluences

randonnée en théorie des nombres entiers. paysages et points de vue, rencontres et cueillettes.

première partie – arithmétique.

0 – effleurement d'ensemble

les sommants d'un entier n sont les entiers > 0 et ≤ n qui entrent par addition dans la composition de n. par exemple 1 + 4 = 2 + 3 = 5 = 1 + 1 + 3 = etc. ('n' étant son propre sommant), certains sommants peuvent être utilisés plusieurs fois. convention d'écriture : j'écris [14] pour 1 + 4, [113] pour 1 + 1 +3 et même [$1^2$3] l'exposant dans cette écriture signifiant toujours le nombre d'occurrences des sommants, etc.

bâti et base d'un entier.

zoom sur un exemple. les sommants de 5 constituent son bâti $\mathcal{B}_5 = \{1^a, 2^b, 3^c, 4^d, 5^e\}$ pour lequel a = 28, b = 12, c = 5, d = 2 et e = 1, car il y a vingt-huit "1" utilisés par l'ensemble des compositions de 5 : dans [14] et [41], toutes les permutations de [$1^2$3] et [12^2], celles de [$1^3$2], et [1^5], douze "2" dans [23] et [32], toutes les permutations de [12^2], celles de [$1^3$2], cinq "3" dans [23] et [32], toutes les permutations de [$1^2$3], deux "4" et évidemment un seul "5" soit card($\mathcal{B}_5$) = 48 sommants au total (voir p.28, tableau de répartitions des valeurs singulières des sommants).

j'appelle os(5) (os pour "occurrences des sommants"), la suite d'entiers (a b c d e) = (28 12 5 2 1).

la base de ce bâti est l'ensemble S($\mathcal{B}_5$) = {1, 2, 3, 4, 5} soit plus simple-ment (car, ici, sans ambigüité et pour rendre l'usage plus commode) la suite naturelle s_5 des 5 premiers entiers de l'ensemble $\mathbb{N}^+$ des entiers positifs.

plus généralement à tout entier n on associe son bâti $\mathcal{B}_n$ (calcul explicite, voir p. 25), et sa base S($\mathcal{B}_n$) qui est la suite s_n des entiers de 1 à n.

la base de tout entier N ≥ n contient toutes les bases S($\mathcal{B}_n$); on a S($\mathcal{B}_N$) = {1, 2,…, n, (n+1), …, (N-1), N} – cette base pouvant être considérée comme l'unique exemplaire ordonné selon l'ordre naturel, de l'ensemble des entiers positifs N^+ = {1, 2, .., n, n+1, …, N-1, N}.

"1" est le premier et le seul sommant commun à tous les entiers ≥ 1; "2" est le deuxième sommant commun à tous les entiers ≥ 2. plus généralement n est le n-ième sommant commun à tous les entiers $\geq$ n. les bases forment ainsi des emboîtages, c'est dire qu'à la suite naturelle des entiers correspond la suite "naturelle" des bases.

tous les entiers sont donc à la fois sommants et sommés. on peut, notamment, considérer la suite $s_{\aleph_0}$ comme la base $S(\mathcal{B}_{\aleph_0})$ du bâti du nombre $\aleph_0$, $\mathcal{B}_{\aleph_0} = \{1^\infty, 2^\infty, 3^\infty, \ldots, \aleph_0{}^\infty\}$. je considère ce bâti comme le chaînon manquant entre $\aleph_0$ et la puissance du continu $2^{\aleph_0}$.

petit commentaire : partition d'entiers et partition d'ensembles.

dans ce titre, le mot "partition" n'a pas le même sens selon qu'il s'ap-pli-que aux entiers ou aux ensembles.

pour un ensemble E_n de n éléments, il s'agit de tous les modes de ré-partitions des objets qu'il contient; on a card$\mathcal{P}(E_n) = 2^n$. pour cet ensemble $\mathcal{P}(E_n)$ des parties de E_n, les sous-ensembles {a, b} et {b, a} ne forment qu'un seul ensemble, les permutations n'y sont pas considérées, ce qui n'est pas le cas pour les partitions d'entiers (voir définition plus loin) pour lesquelles le nombre des partages constituant la partition (voir ci-après vocabulaire) est card$P_n = 2^{n-1}$. nous distinguerons donc partition d'entier P_n et partition d'ensemble $\mathcal{P}(E_n)$ ou $\mathcal{P}_{En}$.

nous avons le rapport numérique immédiat entre la partition P_n d'un entier n, et la partition $\mathcal{P}_{En}$ du cardinal de l'ensemble des parties de l'ensemble E_n à n éléments: card$\mathcal{P}_{En}$ = 2cardP_n; si, du point de vue numérique, ces deux valeurs convergent à l'∞, les objets dont il s'agit restent infiniment distincts.

par ailleurs, la suite os(n) = (abcd…), étant unique, est l'homologue de n et peut donc le représenter sans ambiguïté. on peut alors écrire (voir p. 12): os(n) = (1 2 5 12 28 64 …k,…s) où le '1' corres-pond au partage constitué seulement de n lui-même et 's' au par-tage constitué de l'addition de n'1'. (pour connaître le n-ième terme k et le dernier terme s de cette liste, voir page 25).

I – partition d'un entier

vocabulaire. chaque entier $n \geq 1$, car il n'y a pas de partage de 0!, s'éga-lise en partages $p_j(n)$ formés de k sommants entiers $s_{j,k}(n)$. on a $p_j(n) = [s_{j,k}] = [s_{j,1}\ s_{j,2}\ \ldots\ s_{j,k}]$ et tels que $\sum s_{j,k} = n$, avec $1 \leq s_{j,k} \leq n$. les sommants d'un partage peuvent être égaux ou non; la valeur minimum est '1' et la valeur maximum est 'n'. il est bien évident que si le nombre k des sommants d'un partage est égal à n, alors tous les sommants valent '1', de même s'il n'y a qu'un seul sommant alors c'est 'n' lui-même.

langage imagé : un entier n est un immeuble, à j étages, ses partages p_j; à chaque étage k appartements les sommants $[s_{j,k}]$, chaque appartement possédant $s_{j,k}$ –sa valeur– pièces. la base de n fournit les briques de construction de P_n et la suite ordonnée os(n) est le répartitoire. le plan de construction est la partition P_n.

définition : la partition P_n d'un entier n est l'ensemble, ou union disjointe $\uplus$, de ses partages $P_n = \uplus p_j(n)$.

le bâti $\mathcal{B}_n$ de n est l'ensemble de ses sommants.

données. (voir tableau page 35)

d1 - quel que soit l'entier $n \geq 2$, il existe un entier $q \geq 0$, tel que n se situe dans un intervalle $I_q = I_{\{n_1,n_2,\ldots,n_k\}} = [2^q+1_{(= n_1)},\ldots, 2^{q+1}{}_{(= n_k)}]$.

l'entier "q" est l'index de l'intervalle I_q. par exemple $I_0 = [2^0+1(= 2), 2^{0+1}(= 2)] = I_{\{2\}}$ (seul cas où les bornes de l'intervalle sont égales, $2^0+1 = 2^{0+1}$), $I_1 = I_{\{3,4\}} = [2^1+1(= 3), 2^{1+1}(= 4)]$, $I_2 = I_{\{5,6,7,8\}} = [2^2+1(= 5),..., 2^{2+1}(= 8)]$ que j'abrège en $I_{\{5,8\}}$, etc.

d2 - le nombre d'entiers contenus par intervalle est : $I_n = \mathrm{card}(I_q) = 2^q$.

d3 - le nombre des partages de n est $p(n) = 2^{n-1}$.

addition d'entiers et composition des partages.

toute addition d'entiers représente un partage du résultat.

ainsi la somme de gauss est le partage particulier du nombre n dont tous les sommants forment la suite naturelle des entiers. (voir p26)

à $\sum n = 1 + 2 +\ldots + (n - 1) + n = n(n+1)/2$ correspond la famille $P_n = 2^{(n(n+1)/2)-1}$ des n! permutations des partages [1, 2, …, (n-1), n] du nom-bre $g = n(n+1)/2$. la formule de gauss ne fonctionnant que pour ces partages, ce qui est l'indice d'une structure singulière de cette suite qu'on peut considérer comme représentant l'ensemble de ses n! permutations. il en est de même de la suite de fibonacci où toute paire consécutive forme l'entier suivant selon $F_{n+1} = F_{n-1} + F_n$ à quoi correspond le partage de F_{n+1}, $[F_{n-1}\ F_n]$. etc. ceci étendu naturellement à la suite toute entière. (voir p9 couvertures des entiers…et p21 le théorème de zeckendorff). revenons à l'arithmétique usuelle.

a) formons la table d'addition des 4 premiers entiers et, à côté, la table des nombres de partages $P_{a+b} = 2^{a+b-1}$ correspondant aux résultats.

+	1	2	3	4
1	2	3	4	5
2		4	5	6
3			6	7
4				8

$p_{(a+b)}$	(1)	(2)	(3)	(4)
(1)	2	4	8	16
(2)		8	16	32
(3)			32	64
(4)				128

par exemple, au nombre 5 = 2 + 3 correspond $P_5 = 2^4 = 16$ partages.
traduisons ces résultats en produits des partages concernés

* (commutative)	(1)	(2)	(4)	(8)
(1)	(1x1)x2	(1x2)x2	(1x4)x2	(1x8)x2
(2)		(2x2)x2	(2x4)x2	(2x8)x2
(4)			(4x4)x2	(4x8)x2
(8)				(8x8)x2

à chaque case de l'addition des entiers, a + b = c, lui correspond le dou-ble du produit des partages correspondants,
$a + b = c \longrightarrow 2P_aP_b = 2 \times 2^{a-1} \times 2^{b-1} = 2^{a+b-1} = 2^{c-1} = P_c$.
par exemple : à $3 + 5 = 8 \longrightarrow 2^{3+5-1} = 2^7 = P_8$.
cette correspondance permet de réécrire le tableau $P_{(a+b)}$ ci-dessus :

$p_{(a+b)}$	b = 1	b = 2	b = 3	b = 4
a = 1	P_2	P_3	P_4	P_5
a = 2		P_4	P_5	P_6
a = 3			P_6	P_7
a = 4				P_8

cette correspondance s'étend à toute addition de n termes puisqu'il est toujours possible de rassembler par paires les entiers consécu-tifs.
par exemple : $2 + 2 + 11 = (2 + 2) + 11 = 4 + 11 = 15 \longrightarrow 2^{4+11-1} = 2^{14} = P_{15}$; et aussi $2 + (2 + 11) = 2 + 13 \longrightarrow 2^{2+13-1} = 2^{14}$ et donc aussi $2^{2+2+11-1}$. ce qui se généralise aisément :
à $a + b + c +\ldots + n = s \longrightarrow 2^{a+b+c\ldots+n-1} = P_s = 2^{s-1}$.
les termes a, b, c etc. étant quelconques.

la correspondance est associative, commutative, etc.
on peut donc énoncer : à l'addition, de n'importe quelle manière, de n entiers quelconques correspond le nombre des partages du résul-

tat. cette correspondance est surjective puisque elle reste vraie pour tous les partages d'un entier n.
en particulier, pour la somme de gauss nous obtenons
à $g = \sum n = 1 + 2 + \ldots + n = n(n+1)/2$ correspond $2^{\{n(n+1)/2\}-1} = \frac{1}{2}\sqrt{2^{n(n+1)}} = P_{\sum n} = 2^{(\sum n)-1} = \frac{1}{2}(2^{\sum n}) = \frac{1}{2}P_{\sum(n+1)}$ ou $P_{g+1} = P_{\sum(n+1)} = 2^{(\sum n)} = 2^g$..
<u>remarque</u> : l'exposant de $P_{\sum n}$ est $(n(n+1)/2) - 1 = (n^2 + n - 2)/2 = (n - 1)(n + 2)/2$ qui admet la récurrence $f(n+1) = n + f(n)$ avec $f(0) = -1$; d'où la suite

0	1	2	3	4	5	6	7	etc
-1	-1	0	2	5	9	14	20…etc	

par exemple, $f(6) = 5 + f(5) = 5 + 9 = 14$.

cette suite est donnée sous la forme inverse A080956 sur oeis avec l'identité $(n+1)x(2-n)/2$. voir annexe.

nous retrouverons la forme fonctionnelle $f(n+1) = n + f(n)$ plus loin (voir p12 différence…).

b) <u>multiplication d'entiers</u>.

la multiplication ne pose pas de problème spécial, puisqu'elle correspond à une série d'additions dont tous les termes sont identiques.
$a \times b = d = (b + b + \ldots + b)$ a termes b, ce qui signifie qu'il y a $(a - 1)$ additions toutes de termes identiques; nous aurons donc :
$a \times b = d = \underbrace{(b + b + \ldots + b)}_{\text{a termes b}} \rightarrow 2^{a-1}P_b{}^a = 2^{a-1}2^{a\,(b-1)} = 2^{ab-1} = P_{ab} = P_d = 2^{d-1}$.

par exemple : $3 \times 7 = 21 \longrightarrow 2^{(3x7)-1} = 2^{20} = P_{21}$.

c) <u>rapport de la multiplication à l'addition.</u>

on a :
$ab/(a+b) = d/c \rightarrow 2^{ab-1}/2^{a+b-1} = 2^{ab-a-b} = P_d/P_c .= 2^{d-1}/2^{c-1} = 2^{d-c} = P_{d-c+1}$.
exemple : $3 \times 7/(3+7) = 21/10 \rightarrow 2^{21-10} = 2^{11} = P_{12}$.

d) <u>variations.</u>

1 − ce qui précède n'est qu'un cas particulier du rapport de deux entiers et même du rapport de n entiers dont deux sert de paradigme.
voyons ce qui se passe en variant un par un les entiers précédemment utilisés (la paire (3, 7)), d'une unité; on a les quatre paires (2, 7), (4, 7), (3, 6) et (3, 8) qui en forment le voisinage immédiat. opérons :

la paire initiale (3, 7) → 21/10 → $2^{21-10} = 2^{11}$
(2, 7) → 14/9 → $2^{14-9} = 2^5$
(4, 7) → 28/11 → $2^{28-11} = 2^{17}$
(3, 6) → 18/9 → $2^{18-9} = 2^9$
(3, 8) → 24/11 → $2^{24-11} = 2^{13}$.

(3, 7) représente le rationnel 2,1
(2, 7) " réel périodique 1,55…
(4, 7) " " " 2,5454…
(3, 6) " l'entier 2, et
(3, 8) " le réel périodique 2,1818…
ce voisinage s'ordonne selon les valeurs

1,55…< 2 < 2,1 < 2,18… < 2,54…

soient les paires (2, 7) < (3, 6) < (3, 7) < (3, 8) < (4, 7), ou en partages : $2^5 < 2^9 < 2^{11} < 2^{13} < 2^{17}$, c'est-à-dire $P_6 < P_{10} < P_{12} < P_{14} < P_{18}$.

nous pouvons donc énoncer : à tout rationnel p/q lui correspond un partage d'un entier $P_{p-q+1} = 2^{p-q}$, avec $p \geq q$. le seul cas d'égalité concernant la paire (2, 2) avec $2 \times 2/(2+2) = 4/4 = 1$ pour lequel on a $2^{4-4} = 2^0 = 1$.

2 – prenons une série $p_1/q_1 = p_2/q_2 = \ldots = p_n/q_n = k$.
nous avons la série de correspondances

$(p_1, q_1) \rightarrow 2^{p_1-q_1}$
$(p_2, q_2) \rightarrow 2^{p_2-q_2}$
….
$(p_n, q_n) \rightarrow 2^{p_n-q_n}$.

pour avoir $(p_i, q_i) = (p_j, q_j)$ il faut que l'on ait $(p_j, q_j) = (ap_i, aq_i)$. les correspondances sont $(p_i, q_i) \rightarrow 2^{p_i-q_i}$ et $(p_j, q_j) = (ap_i, aq_i) \rightarrow 2^{a(p_i-}$

$^{qi)}$. on voit donc que les correspondances diffèrent du cœfficient de proportionnalité 'a', le rapport des deux correspondances étant

$$2^{a(pi-qi)}/2^{pi-qi} = 2^{(a-1)(pi-qi)} = P_a{}^{pi-qi} = P_{pi-qi+1}{}^{a-1}.$$

par exemple pour 7/5 = 21/15 le rapport de proportionnalité de (7, 5) à (21, 15) est 3. les correspondances sont : (7, 5) → $2^2 = 4 = P_3$ et (21, 15) → $2^6 = 64 = P_7$, soit 16 fois plus. le rapport des correspondances est $2^{2x2} = 2^4 = 16 = P_3{}^2$. on remarque ainsi que, en utilisant l'écriture des cœfficients de pascal, $({}^{pi-qi}{}_a) = ({}^{a-1}{}_{pi-qi+1})$.

voyons un autre exemple avec le même cœfficient de proportionnalité : soit (13, 8) = et (39, 24). les correspondances sont (13, 8) → $2^5 = 32 = P_6$ et (39, 24) → $2^{15} = 32768 = P_{16}$, soit $1024 = 2^{10}$ fois plus.

on voit que le cœfficient de proportionnalité intervient sur la puissance du partage, de $2^2 = P_3$, on passe à $2^{2x3} = 2^6 = P_7$, et de $2^5 = P_6$ on passe à $2^{5x3} = 2^{15} = P_{16}$; c'est-à-dire qu'on passe de P_{a-b+1} à $P_{a-b+1+w}$, où w = k(a – b) – (a – b) = (k – 1)(a – b).

on peut donc écrire : soient (a, b) et (ka, kb) = k(a, b), alors

à (a, b) → $2^{a-b} = P_{a-b+1}$ et à k(a, b) → $2^{k(a-b)} = P_{a-b+1}{}^k = P_{k(a-b)+1} = P_{k+1}{}^{a-b}$.

II – <u>couverture d'un entier</u>.(ne pas confondre avec la notion de même nom – couverture – inventée par jean leray pour des structures homologiques, durant sa captivité par les nazis en 1943,).

A – partages et partitions d'entiers.
B – nappages et couverture d'un entier.
C – couvertures des entiers et nombres de fibonacci "pairs" F_{2n}.
D – varia.

A – partages et partitions d'entiers.

voir aussi sylvie heubach et toufik mansour combinatorics of compositions and words, coll. discrete mathematics and its applications, 2010, chap.3 compositions, def.3.21 et le théorème 3.23. aussi a. k. agalvar…euler's identity… et partitions theory…

I – partages. définition, exemples, remarques.

définition 1 : j'appelle partage $p_i(n)$ de l'entier n toute addition d'entiers qui retourne n comme résultat.

exemples : 1 = 1, 2 = 2 = 1 + 1, 3 = 3 = 1 + 2 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1.

ces entiers qui entrent dans la composition de n (et n lui-même) sont appelés "sommants $s_{j,k}$" du partage $p_i(n)$.

remarques : a) n est un partage de lui-même;

b) 1 + 2 et 2 + 1 sont considérés comme deux partages distincts de 3. je les nomme "partages miroirs". il en sera ainsi pour tout entier.

c) il y a 2^{n-1} partages $p_i(n)$, i parcourt toutes les valeurs de 1 à 2^{n-1}.

II – partitions

déf. 2 : j'appelle partition P_n de l'entier n l'ensemble de ses partages. $P_n = \{p_{1,n}, p_{2,n}, \ldots, p_{k,n}\}$ de 1 à $k = 2^{n-1}$.

le cardinal de P_n est donc $card(P_n) = 2^{n-1}$.

convention : j'écris les partages $p_i(n)$ en omettant le signe de l'addition et je place les sommants entre [ ] ([12] mis pour 1 + 2).

exemples : p(1) = [1], et P_1 = {[1]}; $p_1(2)$ = [2], $p_2(2)$ = [1^2] et P_2 = {[2], [1^2]}; $p_1(3)$ = [3], $p_2(3)$ = [12], $p_3(3)$ = [21], $p_4(3)$ = [1^3] et P_3 = {[3], [12], [21], [1^3]}.

B – nappage et couverture d'un entier.

travaillons directement sur un exemple, la partition de 3, P_3.

ses quatre partages sont

$p_1(3)$ = [3], $p_2(3)$ = [12], $p_3(3)$ = [21] et $p_4(3)$ = [1^3].

à chaque partage j'associe un nombre, sa nappe, obtenu en multipliant entre eux tous les sommants du partage, ce qui s'écrit, avec la convention que nap([n]) = n :

nap([3]) = 3, nap([12]) = 2, nap([21]) = 2 et nap([1^3]) = 1.

(évidemment, les partages miroirs ont même nappe).

ainsi à chaque partition P_n nous pouvons associer son ensemble de nap-pes; d'où la

définition : la couverture d'un entier est la somme de toutes ses nappes.

le partage $p^n_{j,k}$ comporte k sommant $s_{j,k}$, la nappe de $p^n_{j,k}$ est égale à $nap(p^n_{j,k}) = \Pi_k s_{j,k}$, et la couverture de n est donc :

$$couv(n) = \sum_j nap(p^n_{j,k}) = \sum_j \Pi_k s_{j,k}. \qquad (I)$$

voici la liste des couv(n) de 1 à 10 :

n = 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

couv(n) = 1 3 8 21 55 144 377 987 2584 6765

C – couvertures des entiers et nombres de fibonacci.

première. (voir p19)

1) écrivons les premiers fibonacci en en distinguant les "pairs" F_{2n} :

1 1 2 3 5 8 13 21 34 55 89 144 233 377 610 987 1597 2584 4181 6765

F_2 F_4 F_6 F_8 F_{10} F_{12} F_{14} F_{16} F_{18} F_{20}

et comparons avec les premières couvertures.

1 3 8 21 55 144 377 987 2584 6765. on a l'égalité couv(n) = F_{2n}.

2) les fibonacci "impairs" de la forme F_{2n+1}, s'obtiennent par
$F_{2n+1} = F_{2n+2} – F_{2n}. = F_{2(n+1)} – F_{2n}$ = couv(n+1) – couv(n);
soit en termes de successeurs, avec s(n) = n + 1 :
F_{2n+1} = couv(s(n)) – couv(n).

les nombres troués.

a) à chaque partage $p^n{}_j$ j'associe un nombre, sa nappe nap($p^n{}_j$). ce nombre s'obtient en effectuant le produit entre eux des k sommants du partage. nap($p^n{}_j$) = $\Pi_k s_{j,k}$. (pour le calcul explicite de k, voir p.27)

ex. : un partage de [4] est 3 + 1 que j'écris [31]; nap[31] = nap[13] = 1 x 3 = 3, (les nappes des permutations d'un partage sont évidemment identiques). un autre partage de [4] est [$1^2$2], nap[$1^2$2] = nap[121] = nap[21^2] = 1 x 1 x 2 = 2. et ainsi de suite. le nombre n est à lui-même sa propre nappe nap[n] = n.

les nappes sont des classes d'équivalences des partages. elles sont ainsi un moyen d'obtenir tous les partages d'un entier, en tant que classes indexées par leurs valeurs regroupant tous les partages permettant d'obtenir ces valeurs.

par exemple, pour l'entier 6, les partages [$1^2$4], [$1^2 2^2$] et toutes leurs permutations appartiennent à la même classe 6_4, c'est-à-dire la classe nappée de valeur 4 pour l'entier 6. par exemple aussi quels sont les partages de 5 de classe nap(p_5) = 7? on note cette classe 5_7. il faut chercher tous les partages de 5 dont la nappe est 7; comme il n'y en a pas la classe 5_7 est vide, qu'on écrit 5_7 = 0. pour

5_6 on a : $5_6 = \{[23], [32]\}$ que je réécris $\{6[2, 3] \times 2\}$, où 6 est la classe de valeur 6, [2, 3] le représentant des permutations des partages ayant mêmes sommants et $\times 2$ le nombre de ces partages, etc.

nappes médianes et nappes maximales.

a) si l'on "brise" un entier n pair en deux parts égales, on obtient deux moitiés, chacune de valeur n/2. si l'on désire effectuer la même opération avec un entier impair on obtient deux parts de valeur (n+1)/2 pour l'une et (n-1)/2 pour l'autre.

définition : j'appelle nappe médiane m_n le produit $n/2 \times n/2 = n^2/4$ pour les entier pairs et $(n+1)/2 \times (n-1)/2 = (n^2-1)/4$ pour les entier impairs. ce nombre m_n est le maximum qu'on peut obtenir avec un partage à 2 sommants. de plus, à partir de $n \geq 5$, on a $m_n > n$. et donc $m_5 = 2 \times 3 = 6$ alors que $m_4 = 2 \times 2 = 4$.

b) pour tout entier n > 6, il existe une famille de partages tels que leurs nappes, égales entre elles, sont supérieures à toutes les autres.

définition ; je nomme nappe maximale s_n une telle nappe, et on a $s_n > m_n > n$ dès que n > 6. j'appelle extension minimale de n sa nappe médiane, et extension maximale sa nappe maximale.

c) modularité.

la recherche des nappes maximales conduit à ranger les entiers en 3 classes. pour toutes ces classes $k \geq 0$. cette modularité se retrouve, notamment, chez claude boucher "l'algorithme de flavius josèphe", bull. de l'association mathématique du québec (amq) vol. XLII n°4 déc 2002.

1°) les multiples de 3 de la forme n = 3k;
2°) les entiers de la forme n = 3k + 1 et
3°) les entiers de la forme n = 3k + 2.

la forme n = 3k : 0, 3, 6, 9, 12, 15, etc.

ces entiers possèdent un partage formé exclusivement de k sommants identiques, '3' : $p_n = [3_1 3_2 \ldots 3_k] = [3^k]$, fournissant la nappe maximale $s(n) = 3^k$. (illustration de la remarque sur les exposants, k occurrences et k puissance).

par exemple, l'entier 6 possède un partage $[3^2]$ fournissant la nappe s(6) = 9; mais m(6) est aussi égal à 9, cet entier est le dernier pour lequel s(n) = m(n). l'entier 9 possède un partage [3^3] fournissant la nappe s(9) = 3^3 = 27 avec m(9) = 4 x 5 = 20, etc.

la forme n = 3k + 1 : 1, 4, 7, 10, 13, 16, etc.

ces entiers possèdent deux séries de partages : $p_1 = [4, 3_1, 3_2, \ldots, 3_{k-1}] = (4, 3^{k-1}]$ formé d'un seul '4' et de k-1 '3', et ses k permutations; ces partages fournissent la nappe maximale $s(n) = 4 \times 3^{k-1}$; et $p_2 = [2_1 2_2 3_1 3_2 \ldots 3_{k-2}] = [2^2, 3^{k-2}]$ et ses k!/2!(k-2)! permutations fournissant la même nappe maximale. puisque 4 = 2 x 2, ce qui ne change que le nombre des sommants et pas leur produit.

remarque : si on remplaçait 4 par 1 + 3 ([1, 3]), le déficit serait $4 \times 3^{k-1} - 3^k = 3^{k-1}$. par exemple pour 7 on obtiendrait 1 x 3 x 3 = 9 au lieu de 4 x 3 = 12, pour 10 on aurait 1 x 3 x 3 x 3 = 27 au lieu de 4 x 3 x 3 = 36,

la forme n = 3k + 2 : 2, 5, 8, 11, 14, 17, etc.

ces entiers possèdent un partage, et ses k+1 permutations, $p_n = [2, 3_1 3_2, \ldots, 3_k]$ fournissant la nappe maximale $s(n) = 2 \times 3^k$.

on peut donc maintenant former le tableau des nappes, médianes et maximales, avec $k \geq 0$.

n		3k	3k+1	3k+2
pair	s	3^k	$4 \times 3^{k-1}$	2×3^k
	m	$9k^2/4$	$(9k^2+6k+1)/4$	$(9k^2+12k+4)/4$
impair	s	3^k	$4 \times 3^{k-1}$	2×3^k
	m	$(9k^2-1)/4$	$3k(3k+2)/4$	$3(3k^2+4k+1)/4$

α– différence entre la somme de gauss $g_n = \sum n$ d'un entier n et son extension minimale m_n. elle s'écrit : $d(g_n, m_n) = g_n - m_n$.

$$d(g_n, m_n) = \text{si} \begin{cases} n \text{ pair } n(n+1)/2 - n^2/4 = n(n+2)/4 \\ n \text{ impair } n(n+1)/2 - (n^2 - 1)/4 = (n+1)^2/4. \end{cases}$$

la forme récurrente, identique à celle de la page 5, est, ici aussi, la même dans les deux cas; f(n+1) = n + f(n); elle génère les deux suites, avec $f(n_0) = n_0$ soient f(2) = 2 et f(1) = 1.:

2 4 6 8 10 12 14 16 18 20…
↗↓ ↗↓ ↗...

f_{pair} : 0 2 6 12 20 30 42 56 72 90 110…suite n(n+1)
et

1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21…

↗↓↗↓↗…

f_{impair} 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121…qui est la suite des carrés.

ces deux suites sont répertoriés A002378 pour la première et A000290 pour la seconde sur internet dans l'oeis.. leur fusion donne la suite A002620 voir annexe.

la fusion de ces deux suites donne la suite d_n (avec n alternativement pair et impair) : 0 1 2 4 6 9 12 16 20 25 30 36 etc., où l'on reconnaît la suite des médianes m_1 m_2 m_3 m_4 m_5 m_6 etc. donc nous pouvons écrire :

$g_n - m_n = m_{n+1}$, soit encore $g_n = m_n + m_{n+1}$ (a) avec $m_1 = 0$. par exemple $g_{11} = m_{11} + m_{12} = 30 + 36 = 66$.

écrivons maintenant la suite des g_n : $g_1 = 1$, $g_2 = 3$, $g_3 = 6$, $g_4 = 10$, $g_5 = 15$, etc., on remarque bien que $g_n = g_{n-1} + n$ (b). par translation à gauche, l'identité (a) devient $g_{n-1} = m_{n-1} + m_n$. ainsi on a $g_n - n = m_{n-1} + m_n$, or selon (a) $m_n = g_n - m_{n+1}$ donc $g_n - n = m_{n-1} + g_n - m_{n+1}$ et en effectuant toutes les simplifications $n = m_{n+1} - m_{n-1}$ c'est-à-dire que tout entier n est la différence des deux médianes qui le cernent immédiatement :

$n = d(m_{n+1}, m_{n-1})$.

β– différence entre la somme de gauss d'un entier n et son extension maximale s(n). elle s'écrit : $d(g_n, s_n) = g_n - s(n)$. les valeurs de s_n sont données par le tableau des nappes ci-dessus, qu'on peut résumer ainsi :

$f_0 :: n = 3k \quad \mapsto\longrightarrow s_n = 3^k$
$f_1 :: n = 3k + 1 \quad \mapsto\longrightarrow s_n = 4.3^k$
$f_2 :: n = 3k + 2 \quad \mapsto\longrightarrow s_n = 2.3^k$.

nappes et apparition des trous.

réciproquement, on peut faire correspondre à chaque entier n sa liste $\mathcal{N}_n$ des classes nappées médianes et maximales.

voici une telle liste $\mathcal{N}_7$ pour n = 7, avec $K_7 = 12$ classes : les 12 classes $c\{[p_j]\times q\}$, c de 1 à 12 et xq toutes les permutations du bâti.

$\mathcal{N}_7$ = 1{[1^7]×1}, 2{[1^5, 2]×6}, 3{[1^4, 3]×5}, 4{[1^3, 4]×4, [1^3, 2^2]×10}, 5{[1^2, 5]×3}, 6{[1^2, 2, 3]×12, [1, 6]×2}, 7{[7]×1}, 8{[1, 2, 4]×6, [1, 2^3]×4}, 9{[1, 3^2]×3}, 10{[(2, 5]×2}, 11{Ø}, 12{[3, 4]×2, [2^2, 3]×3}.

commentaires : 7 ne possède pas de classe 7_{11}; la liste $\mathcal{N}_7$ retourne tous les paramètres de 7. les valeurs particulières reconstituent la suite os(7), il suffit d'additionner toutes les occurrences d'un sommant ($\sum$(l'exposant$_i$ x q_i)) (voir p2 et annexe une formule explicite) : le '7' en classe 7_7 évidemment, les deux '6' en classe 7_6 [16] et [61] les cinq '5' en classes 7_5 [$1^2$5], [151] et [51^2] et 7_{10} [25] et [52], les douze '4' en classes 4 (les quatre [1^3, 4]), 8 (les six [1, 2, 4]) et 12 (les deux [3, 4]. soit os(7) = (1 2 5 12 28 64 144) et le bâti $\boldsymbol{\mathcal{B}}_7$ = {1^{144}, 2^{64}, 3^{28}, 4^{12}, 5^5, 6^2, 7^1} et card$\boldsymbol{\mathcal{B}}_7$ = 256 (voir p27). en effectuant les produits $7_{c,i}$ × $q_{c,i}$ et en sommant le tout, on obtient la couverture de 7, et par conséquent la valeur de F_{14}. ce fait se généralise : $n_{c,i}$ x $q_{c,i}$ = couv(n) = F_{2n} où 'i' est le nombre de sous-classes de c. mais l'algorithme correspondant fournissant une formule explicite pour obtenir "directement" F_{2n} est vite très lourd (voir en annexe).

maintenant voici le tableau de $\mathcal{N}_1$ à $\mathcal{N}_7$. il s'agit de la distribution des partages de n selon la valeur des nappes nap(n) = $\Pi_k s_{j,k}$ en colonnes.

lecture : chaque case à l'intersection de la ligne n et colonne nap(n) contient le nombre n_k de nap(n) et leurs compositions p_n. la somme par ligne n des nappes, $\sum n_k$, redonne évidemment le nombre 2^{n-1} de partages (nappes) de n; la somme des produits $\sum(n_k$ × nap(n)) = F_{2n} (voir ci-après liens avec la suite de fibonacci). code couleurs : jaune = intersection de nombres premiers, cases rouges = classes 0 = trous, gris = au moins un nombre premier et nombres rouges = nombres premiers.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	P_n	F_{2n}
1	1												1	F_2=1
2	1 [1^2]	1 [2]											2	F_4=3
3	1 [1^3]	2 [12]	1 [3]										4	F_6=8
4	1 1[^{4}]	3 [$1^2$2]	2 [13]	2 [4]									8	F_8=21
5	1 [1^5]	4 [$1^3$2]	3 [$1^2$3]	5 [14] [12^2]	1 [5]	2 [23]							16	F_{10}=55
6	1 [1^6]	5 [$1^4$2]	4 [$1^3$3]	9 [$1^2$4] [$1^2 2^2$]	2 [15]	7 [6] [123]		3 [24] [2^3]	1 [3^2]				32	F_{12}=144
7	1 [1^7]	6 [$1^5$2]	5 [$1^4$3]	14 [$1^3$4] [$1^3 2^2$]	3 [$1^2$5]	14 [16] [$1^2$23]	1 [7]	10 [124] [12^3]	3 [13^2]	2 [25]	0	5 [34] [[$2^2$3]	64	F_{14}=377

à partir de 5 le nombre de classes dépasse la valeur de n; 6 n'a pas de classe 6_7 et 7 n'a pas de classe 7_{11}, ces classes Ø sont comme des "trous" dans les partitions. jusqu'à n = 4, m(n) = s(n) = n, de 5 à 6 m(n) = s(n), et à partir de 6 un trou apparaît, à partir de 7 m(n) et s(n) sont découplés.

les trous apparaissent entre la classe n_n et la classe m(n). nous l'avons vu pour 6 pour lequel le trou est situé en 6_7 – entre 6 et 9 –, et pour 7 pour lequel le trou est situé en 7_{11} – entre 7 et 12. ce sont les trous de première espèce. à partir de l'entier 8 des trous apparaissent entre m(n) et s(n). par exemple entre 8 et m(8) = 16 il y a 3 trous de première espèce : les nombres 11, 13 et 14 (2x7). et entre m(8) et s(8) = 18 il apparait un trou de seconde espèce, le nombre 17. on peut donc écrire l'ensemble troué de l'entier 8 : Ø(8) = {(11, 13, 14), 17}. cet ensemble détermine totalement l'entier 8 et le distingue absolument de tous les autres entiers. il lui est, en quelque sorte, "consubstantiel".

lieux : les trous apparaissent dans les extensions des nombres. Ø(n) peut donc aussi être considéré comme un 'dual' de n, son représentant dans une autre structure. j'appelle Ø(n) ensemble lacunaire de n.

A – ces "trous" nous permettent d'énoncer les conditions pour qu'un entier soit classe nappée.

α) pour tout n, n = nap(n); en d'autres termes, tout entier est classe nappée de lui-même. on écrit $nap_n(n) = n$ ou encore n_n.

β) soit un entier w, alors le système diophantien élémentaire, où les a_k sont les sommants des partages de n, donnant les classes nappées $n_w = w$,

$$\sum a_k = n$$
$$\Pi a_k = w$$

n'a de solution que dans 2 cas :

1°- w = n alors selon (α) ci-dessus, le partage $[a_k]$ est w lui-même [w];

2°- w = n + q, alors $[a_k] = [1^r\ a_{r+1}\ a_{r+2} \ldots a_{k-r}]$ où $[1^r]$ représente une suite de r '1' éventuellement nulle (r = 0), et les a_{k-r} sont des diviseurs de w représentant l'ensemble de toutes les compositions de n - r.

par exemple pour n = 7, on a m(7) = 12. soit w = 8, on a le système :

$$1 + 2 + 4 = 7 \text{ et}$$
$$1 \times 2 \times 4 = 8$$

la famille (permutations) des partages est [1, 2, 4] et la classe nappée est 7_8. alors que $7_{11} = 0$ car 11 > 7 est premier et n'a donc pas de diviseurs dans {1 2 … 7}.

par exemple aussi, avec [24] on a pour 6_8 le système : s(6) = 9,

$$2 + 4 = 6$$
$$\text{et } 2 \times 4 = 8$$

alors que $6_7 = 0$ car 7 > 6 est premier et n'a donc pas de diviseurs dans {1 2 … 6}.

cela pour les trous de première espèce, le raisonnement est identique pour les trous de deuxième espèce

plus généralement, tout k premier ou multiple de k, k > n, est un trou pour n car aucune composition des [a_j] de n ne peut l'atteindre selon le système (b) ci-dessus. en d'autres termes k, compris entre n et m(n), n'entre dans aucun partage de n.

soit k un entier, m(n) > k > n est appelé trou de première espèce.

la même définition s'applique pour s(n) > k > m(n) et k est appelé trou de seconde espèce.

par exemple pour n = 16, m(16) = 64, s(16) = 324 et $16_{65} = 0$ est un trou de première espèce car 65 = 5 x 13 et les partages [5, 13] ne peuvent être partages de 16 puisque 5 + 13 = 18, et $16_{170} = 0$ est un trou de seconde espèce car 170 > m(16) et 170 = 2 x 5 x 17, les partages [2, 5, 17] ne pouvant exister pour 16 puisque 2 + 5 + 17 =24, et composés exclusivement de nombres premiers, aucune autre composition ne pouvant atteindre ce résultat.

prolongement : on peut dire que l'ensemble infini $\aleph_0 - s_n$, où s_n est la suite finie des classes nappées de n (s_n de 1 à s(n)), est le complémentaire de l'infinité des ensembles finis s_n de classes nappées. il est aussi le complémentaire trivial de tout n à partir de n + 1, lorsque n + 1 est le premier trou de n.

$\aleph_0$ est aussi la seule suite complète (voir définition plus loin) sans lacune, car il n'y a pas d'"extérieur" autre que $2^{\aleph_0}$.

<u>1 – définition</u> : un nombre troué est un entier n auquel manque au moins une classe nappée n_k.

la classe manquante est notée n^-_k et l'on a $N^- = \{n^-_k\} = Ø$. et cet ensemble de 0, nommé ensemble lacunaire de n, ou encore l'anti-n ou complémentaire trou de n, a un cardinal > 0.

<u>2</u> – soit n + 1 le successeur de n, alors son ensemble $(N+1)^- = N^- - \{n_j\}^+ + \{ b^-_{n+1}\}$, où :

α- - $\{n_j\}^+$ est l'ensemble des trous de n comblés dans n+1, c'est-à-dire récupérés par n+1; et

β - $\{b^-_{n+1}\}$ l'ensemble des trous de n+1 n'appartenant pas à n, propres à $(N+1)^-$.

définition : j'appelle suite complète nap(n) l'ensemble des classes nappées de n, nulles ou non, comprises entre 1 et s(n).

j'appelle suite exacte sex(n) le sous-ensemble de nap(n) des classes nappées de n non nulles. sex(n) = nap(n) – N^-. et donc : nap(n) = sex(n) + N^-_n, avec card(nap(n)) = s(n).

le tableau ci-dessus de $\mathcal{N}_1$ à $\mathcal{N}_7$ donne les suites exactes correspondantes. les produits des valeurs des classes nappées par le nombre de classes nappées redonnent la couverture de n.

le complémentaire de nap(n) comprend ses trous N^- + $\aleph_0$ à partir de s_{n+1}; la seule suite complète infinie est $\aleph_0$ lui-même: sa suite exacte l'est aussi. jamais cependant ces deux suites coïncident. on peut aussi dire que $\aleph_0$ est la seule suite ne possédant aucun trou. d'où une conséquence conjecturale :

passés les entiers de 1 à 5, une suite d'entiers qui ne possède aucun trou est une suite infinie et réciproquement; et il n'y a qu'une seule de ces suites, $\aleph_0$. le partage fournissant la classe nappée de $\aleph_0$ la plus grande possible est le partage infini $[[s]3^{\propto}]$ où s = 4, 22 ou 2.

B − détection et distribution des nombres premiers.

a – à partir de n = 6, toutes les nap(n) sont trouées.

b − le premier trou de nap(n) est le plus petit nombre premier p > n; ; il est aussi le plus petit trou de N^-.

c – comme chaque nap(n), à partir de 6, possède ce nombre premier, il en résulte qu'il y a une infinité de nombres premiers:

d – ces nombres premiers sont répartis différemment dans tous les ensembles complets. ainsi, à l'intérieur d'une suite complète on n'appli-que le crible de divisibilité que sur l'ensemble N^-. afin de distinguer les nombres premiers de leurs multiples.

la condition pour qu'un nombre premier p forme une classe nappée de n consiste en ce que p ≤ n et qu'il entre dans la composition d'un partage de n (système β ci-dessus). si p > n, étant indécomposable il ne peut appartenir à aucun partage de n et donc ne peut former qu'une classe nappée nulle, et c'est même la première de nap(n); il est donc aussi inclus dans la suite complète de n.

on peut énoncer ces faits en termes de fonction plancher où $\lfloor n \rfloor$ est le plus grand n plus petit que n+1, et fonction plafond où $\lceil n \rceil$ est le plus petit entier plus grand que n-1.

on peut donc établir la liste des nombres troués par un, ou pluseurs, nombres premiers ou multiples de nombres premiers.

par exemple 10_{22} est un trou pour 10, c'est-à-dire qu'il n'y a pas de classe nappée 22 dans nap(10), puisque le sommants permettant d'obtenir la nappe 22 sont 2 et 11 et que leur somme est supérieure à 10 (système (a), (b) ci-dessus)., de même 11_{26} pour 11, etc.

nombres premiers, définitions.

première : un entier p > 4 est premier, s'il n'appartient à aucune suite exacte qui le précède.

remarque : on pourrait dire que la primarité "est tournée vers le passé". cette définition ne s'applique pas à 1 qui n'est précédé d'aucun entier et n'est donc pas comparable; '1' n'est pas premier car il est le premier et le seul entier sans précédent.

cette définition commence donc à 2, qui est ainsi le premier nombre premier; 4 est le premier multiple d'un nombre premier. l'entier '6' est le premier qui n'est pas premier puisque 5 possède un partage, 2 + 3, dont la nappe, $5_6 = 2 \times 3 = 6$.

deuxième : soit $p \neq 4$ un entier, p est premier si aucun partage de tout nombre qui le précède ne peut fournir une nappe qui lui soit égale.

remarque : 6 est une nappe de 5, $5_6 = 2 \times 3$ et [23] est un partage de 5, 8 est une nappe de 6, $6_8 = 2 \times 4$ et [24] est un partage de 6; de même 9 est une nappe de 6, $6_9 = 3 \times 3$ et $[3^2]$ est un partage de 6, 10 est une nappe de 7, $7_{10} = 2 \times 5$, et [25] est un partage de 7, etc.

la primarité est donc relative à la totalité de son "passé". on pourrait dire, à l'instar de dedekind, qu'elle fait "coupure" dans l'ensemble des entiers.

troisième : soit p un entier > 5, p est premier s'il troue le plus grand entier n qui lui est inférieur. en d'autres termes, p appartient à la sui-te complète de n mais pas à sa suite exacte, c'est-à-dire à aucun partage de n (deuxième ci-dessus).

remarque : ainsi $6_7 = 0$ et $6_7 \in$ nap(7), etc. cette définition relie explicitement partages, nappes et ensemble lacunaire (les trous) de n.

plus formellement : soit P_n l'ensemble des partages de n (il y en a 2^{n-1}), soit l'extension maximale de n (d'une des formes modulaires vues plus haut) donnant la "longueur" de la suite complète nap(n), alors nous avons:

$$\text{si } p > n,\ p \in \text{nap}(n) \text{ et } p \notin \text{sex}(n).$$

alors p est premier. et c'est même sa première apparition en tant que tel.

<u>pratique</u> : nous avons vu que la suite exacte nap(n) = sex(n) + $\mathbb{N}^-$.

le seul nombre premier de la forme 3k est 3 avec k = 1; il est donc à lui-même son extension, etc.

les autres nombres premiers sont nécessairement de la forme 3k+1 et 3k+2 (voir modularité ci-dessus), et ont donc la plus grande classe nappée possible fournie par les partages $[u3^r]$ où u = 4, 22 ou 2.

voici en tableau un premier classement des nombres premiers selon leur module.

rang→	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
3k+1		7		13		19			31	37		43
3k+2	5		11		17		23	29			41	

et le tableau correspondant en termes de classes nappées maximales (les sommant '4' et '22' sont interchangeables)

k= →	1	2	3	4	5	6	7	9	10	12	13	14	15
3k+1		43		43^{3}		43^{5}			43^{9}	43^{11}		43^{13}	
3k+2	23		23^{3}		23^{5}		23^{7}	23^{9}			23^{13}		23^{15}

valeurs de k ne fournissant pas de nombres premiers (le trait brisé) : 8, 11, 16, 18, 21, etc. finalement il est plus simple d'écrire le tableau en n'apposant que les occurrences de 3 utilisées

k=→	1	2	3	4	5	6	7	9	10	12	13	14	15	17	19	20	22	23
3k+1		1		3		5			9	11		13				20	22	
3k+2	1		3		5		7	9			13		15	17	19			23
p	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71

<u>entiers troués et nombres surréels.</u>

je donne une image des entiers troués sur la droite $\mathbb{N}^+$ à partir de 8.

1-2-3-4-5-6-7-8-9-10-x-12-x-x-15-16-x-<u>18</u>-(19-20-21-22-23-etc…

commentaire : la nappe médiane de 8 est 16 et la nappe maximale est 18. de 1 à 18 nous avons la suite complète nap(8). les croix noires sont en places des trous de première espèce 11, 13 et 14, et la croix rouge est le trou de deuxième espèce 17. au-delà de 18 le complémentaire infini de n. l'ensemble lacunaire de 8 (l'an-ti-8) est donc $N^- = \{\{11, 13, 14\}, 17\}$ et sa suite exacte sex(8) = nap(8) – N^-.

bien que cela ne soit pas dans l'orientation de ce texte, j'établis un parallèle avec les nombres surréels de conway.

surréels	troués
matière	suite complète
forme	" exacte
déchet	ensemble lacunaire.

III – premières confluences.

il semble évident qu'on peut ainsi transférer les couvertures des entiers dans tous les calculs "fibonacciens" et nouer le sort des partages à leurs résultats.

C - liens avec la suite de fibonacci.

deuxième. (voir p9). la suite de fibonacci est définie par : $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, avec $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. j'écris dans l'ordre numérique habituel les entiers n et, dessous, les couv(n) en ajoutant [1] – seul nombre possédant un seul partage trivial d'un seul sommant. nous obtenons les deux suites :

n :	1	2	3	4	5	6	7	8…
couv(n) :	1	3	8	21	55	144	377…	987…

j'écris maintenant dans l'ordre les nombres de fibonacci, en en distinguant les "pairs", et, dessous, les valeurs correspondantes :

F_1	F_2	F_3	F_4	F_5	F_6	F_7	F_8	F_9	F_{10}	F_{11}	F_{12}	F_{13}	F_{14}…
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377…

la comparaison de la suite couv(n) avec la suite de fibonacci montre que couv(n) est la "demi"-fibonacci "paire" $F_2F_4F_6F_8$….

on peut donc associer à chaque entier n son "double invisible" F_{2n}. soit couv(n) = F_{2n}. pour connaître F_{2n+1} il suffit d'effectuer $F_{2n+2} – F_{2n} = F_{2(n+1)} – F_{2n}$. nous pouvons donc écrire :

F_{2n+1} = couv(n+1) – couv(n) et, en termes de successeurs:

F_{2n+1} = couv(sn) – couv(n).

il existe une récurrence simple liant les couv(n) = F_{2n} et les cœfficients du triangle de pascal C^n_k, on a : couv(n) = $F_{2n} = \Sigma C^{n+(k-1)}_{n-(k-1)}$, k = 1 à n.

ainsi : couv(5) = $C^5_5 + C^6_4, + C^7_3 + C^8_2 + C^9_1 = 1 + 8 + 21 + 20 + 5 = 55 = F_{10}$.

pour leur part, les fibonacci impairs se calculent par une récurrence semblable : $F_{2n+1} = \Sigma C^{n+k-1}_{n+2-k}$.

ainsi $F_5 = F_{2x2+1} = C^2_3 + C^3_2 + C^4_1 = 1 + 3 + 1 = 5$. etc.

décalage. pour rester dans l'homogénéité de la relation, on peut aussi considérer les F_{2n+1} comme les "doubles" de nombres demis : à n + ½ lui correspond couv(n+1/2) = $F_{2(n+1/2)} = F_{2n+1}$. mais on perd la relation aux entiers.

D – varia.

2 – nombre d'or.

la suite de fibonacci étant liée au nombre d'or, il est légitime de faire de même à notre manière.

α) le nombre d'or s'écrit à partir de la suite de fibonacci : $\Phi = F_n/F_{n-1}$.

on peut donc aussi écrire le nombre d'or : $\Phi = F_{2n}/F_{2n-1}$ (a)

c'est-à-dire avec nos formules : Φ = couv(n)/F_{2n-1} (a')

et nous pouvons aussi écrire : $\Phi = F_{2n-1}/F_{2n-2}$ (b)

c'est-à-dire : $\Phi = F_{2n-1}/F_{2(n-1)} = F_{2n-1}$/couv(n-1) (b')

soit, en multipliant les deux expressions : (a) x (b) = (a') x (b')

$\Phi^2 = F_{2n}/F_{2n-1} \times F_{2n-1}/F_{2n-2}$ = couv(n)/$F_{2n-1} \times F_{2n-1}$/couv(n-1) = couv(n)/couv(n-1)

donc Φ = √[(couv(n)/couv(n-1)]. aussi couv(n) = Φ^2 x couv(n-1); ou encore

log Φ = ½ (log couv(n) –log couv(n-1)) = ½ (log F_{2n} –log F_{2n-2}).

β) en termes de successeurs n = (n – 1) + 1; notant s(n) = n + 1, on a

$$\Phi^2 = \text{couv}(n+1)/\text{couv}(n) = \text{couv}[s(n)]/\text{couv}(n).$$

de plus, puisque Φ^2 = couv(n)/couv(n-1), on peut écrire :

$\Phi^2 = \Sigma C^{n+(k-1)}_{n-(k-1)}/\Sigma C^{(n-1)+(k-1)}_{(n-1)-(k-1)} = \Sigma C^{n+k-1}_{n-k+1}/\Sigma C^{n+(k-2)}_{n-k}$. etc.

3 – matiyasevich (spécialiste des équations diophantiennes) écrit R(u, v) où v est le 2u-ième nombre de fibonacci que je transcris R(n, couv(n)) où couv(n) est le 2n-ième nombre de fibonacci.

4 – les nombres de milnor et les cardinaux des ensembles $\mathcal{E}_n$, classes d'isomorphismes des diagrammes d'enriques de complexité n.

maria pe pereira et patrick popescu-pampu démontrent que (in, notamment, fibonacci numbers and self-dual lattice structures for planes branches, 10 mars 2013) les nombres de fibonacci de la forme F_{2n-4} (où les nombres 2n – 4 sont les nombres de milnor) sont les cardinaux des ensembles $\mathcal{E}_n$, classes d'isomorphismes des diagrammes d'enriques de complexité n.

je traduis par $F_{2n-4} = F_{2(n-2)}$ = couv(n-2) auxquels je fais correspondre la suite d'entiers n - 2 avec $n \geq 3$.

<u>γ – le théorème de décomposition de zeckendorff. </u>(voir aussi le théorème plus général d'ostrovsky).

zeckendorff a démontré que tout entier peut s'écrire comme addition de nombres de fibonacci, à conditions que ces nombres ne soient pas consécutifs.

on peut traduire ceci en termes de couvertures : on garde tous les F_k pairs et on réécrit les $F_{k'}$ impairs comme indiqué ci-dessus en C-2.

exemple : 10 = 8 + 2, soit en fibonacci 10 = $F_6 + F_3$ ($F_6 = 8$, $F_3 = 2$). pour F_6 pas de problème, et $F_3 = F_4 - F_2$ ($F_4 = 3$, $F_2 = 1$); donc 10 = $F_6 + F_4 - F_2$ = couv(3) + couv(2) – couv(1). la consigne zeckendorff ("pas de fibonacci consécutifs") est oubliée par la soustraction.

ce fait nous amène à considérer la suite des fibonacci pairs comme "ba-se de numération" à condition de la croiser avec l'ensemble simplicial $\mathcal{S}$ = {-1, 0, 1} comme montré ci-dessous avec la table de numération.

un nombre n quelconque se lira ainsi (le symbole (±0) signale le choix à effectu-er, + ou – ou 0 fois le fibonacci concerné) : $(\pm0)F_2$ $(\pm0)F_4$ $(\pm0)F_6$ …$(\pm0)F_{2n}$ en lecture inverse, c'est-à-dire que la lecture s'effectue de droite (position F_2) à gauche. la décomposition n'est généralement pas unique. mais on peut choisir, quand cela est possible, de ne pas écrire un entier avec un fibonacci qui lui soit supérieur, sinon on risque d'obtenir une liste infinie de décompositions par nombre, une règle consistant à comparer la valeur cumulée la plus proche.

ainsi 5 s'écrit $F_6 - F_4$, = 8 – 3, et 14 = $F_8 - F_6 + F_2$ = 21 – 8 + 1 codés 5 = (+ − 0) et 14 = (+ − 0 +). etc. la relation Codes → N est surjective.

début de la table de numération couvertures/fibonacci.

n	…	5	4	3	2	1
couv(n) = F_{2n}		F_{10}	F_8	F_6	F_4	F_2

valeur		55	21	8	3	1
$\sum$cumul = F_{2n+1}-1		88	33	12	4	1
1						1
2					1	-1
3					1	0
4					1	1
4'				1	- 1	-1
5				1	-1	0

l'ensemble $\mathcal{S}$ = {-1, 0, 1} peut servir de générateurs des entiers de diverses façons selon l'algorithme utilisé. par exemple, on utilise l'échelle -1 < 0 < 1 dans l'ordre des F_{2n} croissants.

la liste se déroule ainsi :

-1 = - F_2, 0, 1 = F_2, 2 = $F_4 – F_2$, 3 = F_4, 4 = $F_4 + F_2$ mais aussi[2] 4' = $F_6 – F_4 – F_2$, 5 = $F_6 – F_4$, 6 = $F_6 - F_4 + F_2$, etc.

-1	= -1	= $-F_2$	
0	0		
1	1	= F_2	
1 -1	2	= $F_4 – F_2$	= 3 - 1
1 0	3	= F_4	
1 1	4	= $F_4 + F_2$	= 3 + 1
1 -1 -1	4	= $F_6 – F_4 – F_2$ = 8 – 3 - 1	
1 -1 0	5	= $F_6 – F_4$ = 8 - 3	
1 -1 1	6	= $F_6 – F_4 + F_2$ = 8 – 3 + 1	
1 0 -1	7	= $F_6 – F_2$ = 8 - 1	
1 0 0	8	= F_6	
1 0 1	9	= $F_6 + F_2$ = 8 + 1	
1 1 -1	10	= $F_6 + F_4 – F_2$ = 8 + 3 - 1	
1 1 0	11	= $F_6 + F_4$ = 8 + 3	
1 1 1	12	= $F_6 + F_4 + F_2$ = 8 + 3 + 1	
1 -1 -1 -1	9	= $F_8 – F_6 – F_4 – F_2$ = 21 – 8 – 3 - 1	
1 -1 -1 0	10	= $F_8 – F_6 – F_4$ = 21 – 8 - 3 etc.	

IV - le triangle de pascal (tp).

j'aborde le triangle de pascal de deux points de vue :

α) le point de vue habituel, lié au binôme $(a + b)^m$ où m = 0 à l'∞, que je nomme le point de vue $\mathcal{B}$ et pour lequel le tp est indexé par les valeurs de m, en commençant par "0";

β) le point de vue des partitions d'entiers, que je nomme $\mathcal{P}$, pour lequel, par la translation n = m + 1, le tp $\mathcal{P}$ est indexé à partir de n = 1 puisqu'il n'y a pas de partition de '0'.

de ce fait, les lignes du tp $\mathcal{P}$ fournissent directement les partages en sommants de l'entier n.

<u>a) partages et sommants</u>

a_1) à chaque entier n > 0 lui correspond sa ligne n, composée des cœfficients de pascal $C^n{}_k$, ce qui s'écrit, selon $\mathcal{P}$:

	k=1	k=2	k=3	k=4 etc…
n = 1	1			
n = 2	1	1		
n = 3	1	2	1	
n = 4	1	3	3	1 etc…

a_2) chaque cœfficient $C^n{}_k$ donne le nombre $p_{n,k}$ des partages de n en k sommants $s_{n,i}$, i = 1 à k.

a_3) la somme des $C^n{}_k$ donne le nombre total des partages de n :

$$P_n = \Sigma p_{n,k} = \Sigma C^n{}_k = 2^{n-1},\ k = 1 \text{ à } n.$$

<u>b) utilisation du tp $\mathcal{P}$</u>

b_1) sous chaque $C^n{}_k$ j'écris le produit $s_{n,i}= kp_{n,k} = kC^n{}_k$, nombre total des sommants utilisés par les partages $p_{n,k}$, et

b_2) dessous, j'exhibe les partages en question.

suivent les premières lignes du tp $\mathcal{P}$, auquel j'ajoute la colonne du nombre total de sommants utilisés par n, que je nomme sommante de n, soit $S_n = \Sigma s_{n,k}$. on remarque que $p_{n,k=1} = [n]$ et $p_{n,k=n} = [1...1] = [1^n]$ n '1'

b_3) <u>lecture</u> : le contenu d'une case ($^n{}_k$) est constitué :

1° - du nombre $p_{n,k}$ de partages de n en k sommants;

2° - en dessous, du nombre $s_{n,k} = kC^n{}_k$ des sommants. un calcul explicite est montré en n = 1 et 2;

3°- en dessous, les partages effectifs $[p_{n,k}]$. ces partages, lorsqu'ils sont plusieurs, sont, de plus, classés en ensembles de leur cœfficient $C^n{}_k$, entre {}.

<u>tp $\mathcal{P}$ des partages et des sommants.</u>

<u>k =</u> 1 2 3 4 5

n = 1 1

$1C^1{}_1 = 1 \times 1 = 1$ $S_1 = 1$

$P_{1,1} = [1]$

n = 2 1 1

$1C^2{}_1 = 1 \times 1 = 1$ $2C^2{}_2 = 2 \times 1 = 2$ $S_2 = 3$

$P_{2,1} = [2]$ $P_{2,2} = [11]$

n = 3 1 2 1

$C^3{}_1 = 1$ $2C^3{}_2 = 4$ $3C^3{}_3 = 3$ $S_3 = 8$

$P_{3,1} = [3]$ $P_{3,2} = \{[12]$ $P_{3,3} = [111]$

[21]}

n = 4 1 3 3 1

$C^4{}_1 = 1$ $2C^4{}_2 = 6$ $3C^4{}_3 = 9$ $4C^4{}_4 = 4$ $S_4 = 20$

$P_{4,1} = [4]$ $P_{4,2} = \{[13]$ $P_{4,3} = \{[112]$ $P_{4,4} = [1^4]$

[22] [121]

[31]} [211]}

n = 5 1 4 6 4 1

$C^5{}_1 = 1$ $2C^5{}_2 = 8$ $3C^5{}_3 = 18$ $4C^5{}_4 = 16$ $5C^5{}_5 = 5$ $S_5 = 48$

$P_{5,1} = [5]$ $P_{5,2} = \{[14]$ $P_{5,3} = \{[113]$ $P_{5,4} = \{[1^32]$ $P_{5,5} = [1^5]$

[23] [131] [1121]

[32] [311] [1211]

[41]} [122] $[21^3]\}$

[212]

[221]}

on a vu que S_n, s'obtenait en interne par la formule $S_n = \Sigma s_{n,k} = \Sigma k C^n{}_k$; du fait des propriétés du tp $\mathcal{P}$ on a les récurrences :

$S_n = 2S_{n-1} + 2^{n-2} = 2(S_{n-1} + 2^{n-3})$ avec $S_1 = 1$. par ex. $S_6 = 2(48 + 8) = 112$, etc.

ce qui donne la suite S_n

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	etc…
1	3	8	20	48	112	256	576	1280	2816	etc.

(cette séquence (ici notée S_n) est répertoriée sur internet dans l'encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers sous les références A049610 et A168150, mais avec des points de vues différents – voir ANNEXES). on a la récurrence :

$S_{n+2} = 4(S_{n+1} - S_n)$, avec $S_1 = 1$ et $S_2 = 3$ et, en étendant les formules :

$S_{n+2} = 4(S_{n+1} - (2S_{n-1} + 2^{n-2})) = 4(S_{n+1} - (2(S_{n-1} + 2^{n-3}))$.

plus généralement on peut écrire : $S_{n+k} = 2^k P_n(n + k+ 1)/2$. mais comme $P_n = 2^{n-1}$ et en combinant les puissances de 2 on obtient finalement

$S_{n+k} = 2^{n+k-2} (n + k+ 1)$. par ex., $S_7 = S_{5+2} = 2^5(5 + 2 +1) = 256$. mais cette formule se généralise aisément en observant qu'elle utilise des partages $p_j(n)$; on pourra donc écrire : $S_{pj(n)} = 2^{p_j(n)-2}(n + 1) = 2^{n-2}(n + 1)$ (voir oeis annexe), et dont la suite soustractive (j-ième terme – (j-1)-ième terme) n'est autre que la suite os(n) : 3 – 1 = 2, 8 – 3 = 5, 20 – 8 = 12, etc.

c) densités de sommants.

c1) densité par partage $p_{n,k}$.

les cœfficients C^n_k représentent le nombre de partages de n. il est donc naturel de calculer la densité des sommants utilisés par partage $p_{n,k}$. or cette densité n'est guère que k lui-même puisque le nombre total de sommants par $p_{n,k}$ est donné précisément par la formule $s_{n,k} = kC^n_k$. et donc $s_{n,k}/p_{n,k} = kC^n_k/C^n_k = k$.

c2) densité moyenne.

on peut donc parler d'une densité moyenne des sommants utilisés par la partition de l'entier n, soit le nombre $\delta_n = S_n/P_n$.

voici la suite des premiers δ_n :

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	δ_6	δ_7	δ_8	δ_9
1	3/2	2	5/2	3	7/2	4	9/2	5

cette densité varie comme (n + 1)/2. on peut donc écrire :

$\delta_n = S_n/P_n = (2S_{n-1} + 2^{n-2})/2^{n-1} = S_{n-1}/2^{n-2} + ½ = (n + 1)/2$.

cette identité permet de calculer directement S_n : on a $2^{n-2}(\delta_n - ½) = S_{n-1}$, et, en passant de n à n + 1 : $S_n = 2^{n-1}(\delta_{n+1} - ½)$. comme $S_n = \Sigma kC^n_k$, on a donc : $\Sigma kC^n_k = 2^{n-1}(\delta_{n+1} - ½)$. or 2^{n-1} est le nombre de partages $P_n = \Sigma C^n_k$ de n, d'où : $S_n = P_n(\delta_{n+1} - ½)$, ce qui redonne, puisque $\delta_{n+1} = (n + 2)/2$, $S_n = P_n(n + 1)/2 = \delta_n P_n$. plus généralement sur δ on a, en notant que $\delta_n = \delta_{n-1} + ½ = \delta_{n+1} – ½$, soit $\delta_{n-1} – \delta_{n+1} = -1$.

$\delta_{n+k} = (n + k + 1)/2 = (n + 1)/2 + k/2 = \delta_n + k/2$ d'où $2\delta_{n+k} = 2\delta_n + k$. et donc $2(\delta_{n+k} - \delta_n) = k$.

c3) somme des entiers.(voir p3)

la somme des entiers (gauss) s'écrit $\Sigma n = 1 + 2 + 3 +…+ n = n(n + 1)/2$ que je réécris : $g_n = \Sigma n = n(n + 1)/2 = n\delta_n = nS_n/P_n$.

cette formule, reliant la somme des entiers à leurs partitions, nous indique encore que cette somme divisée par n est la densité moyenne de n : $(\Sigma n)/n = \delta_n = S_n/P_n$.

de plus, $g_n = n(n+1)/2 = n/2 \times (n+1)$, or $n/2 = [(n+1) - 1]/2 = \delta_{n-1}$ et donc $g_n = (n+1)\delta_{n-1}$ et donc aussi $\delta_{n-1} = g_n/(n+1)$, soit par translation : $\delta_n = g_{n+1}/(n+2)$.

c4) densité et nombre d'or

$\Phi = (1 + \sqrt{5})/2$ d'où $\Phi - (\sqrt{5})/2 = ½$, et $\delta_n = (n + 1)/2$ d'où $\delta_n - n/2 = ½$;

pour notre usage, il convient d'indexer Φ par n, soit Φ_n, car ce nombre est tendanciel.

de ces deux identités on tire : $\Phi_n - (\sqrt{5})/2 = \delta_n - n/2$, d'où

$\delta_n - \Phi_n = (n - \sqrt{5})/2$, avec (du fait de la valeur de Φ), $n \geq 3$ d'où évidemment $\Phi_n = \delta_n - (n - \sqrt{5})/2$, avec notamment le cas particulier où n = 3 :

$$\Phi_3 = \delta_3 - (3 - \sqrt{5})/2 = (1 + \sqrt{5})/2.$$

et aussi, puisque $\delta_n = S_n/P_n$:

$S_n/P_n - \Phi_n = (n - \sqrt{5})/2$, soit $\Phi_n = S_n/P_n - (n - \sqrt{5})/2$. et puisque $P_n = 2^{n-1}$, on a : $S_n = 2^{n-1}[\Phi_n + (n - \sqrt{5})/2]$ soit enfin : $S_n = 2^{n-2}(2\Phi_n + n - \sqrt{5})$, et, par circularité des formules : $P_n = 2S_n/(2\Phi_n + n - \sqrt{5})$.

d'autre part, de $\Phi_n = \delta_n - (n - \sqrt{5})/2$, en y incorporant l'expression de δ_n de la somme de gauss ci-dessus, on écrit : $\Phi_n = g_{n+1}/(n+2)$. $- (n - \sqrt{5})/2$ c'est-à-dire $\Phi_n = (n+1)(n+2)/2(n+2) - (n-\sqrt{5})/2 = (1 + \sqrt{5})/2$.

d) rapport de deux sommantes.

le rapport de deux sommantes s'écrit : $S_n/S_{n-k} = \delta_n P_n/\delta_{n-k}P_{n-k}$, c'est-à-dire : $S_n/S_{n-k} = (n+1)2^n/(n-k+1)2^{n-k}$, soit $\{(n+1)/(n+1-k)\} \times 2^k$. en particulier le rapport $S_n/S_{n-1} = [(n + 1)/n] \times 2 = 2 + 2/n$ tend vers 2 quand n tend vers ∞. voici les premières valeurs de ce rapport (entre ( ) les décimales périodiques et "sq" pour "continuer") :

3/1 = 3; 8/3 = 2,(6); 20/8 = 2,5; 48/20 = 2,4; 112/48 = 2,(3); 256/112 = 2,(285714).; 576/256 = 2,25; 1280/576 = 2,(2); 2816/1280 = 2,2; 6144/2816 = 2,(18); 13312/6144 = 2,1(6); 28672/13312 = 2,(153846); 61440/28672 = 2,(142857) [permutation circulaire de 256/112]; 131072/61440 = 2,1(3); 278528/131072 = 2,125; 589824/278528 = 2,117sq..

e) valeurs particulières des sommants.

observons les suites successives des sommants des entiers n. (l'opérateur d'addition n'est pas représenté).

{1}, {2,11}, {3,12,21,111}, {4,13,31,22,1111,112,121,211},
{5,14,41,23,32,113,131,311,122,212,221,1112,1121,1211,2111,11111},
etc.

formons le tableau du nombre des sommants de n selon leurs valeurs :

n\\v(s)	1	2	3	4	5	etc.
1	1					
2	2	1				
3	5	2	1			
4	12	5	2	1		
5	28	12	5	2	1	

etc. (soit la suite os(n), voir p1).

pour connaître, pour un entier n donné, la quantité totale de ses sommants ayant une valeur particulière – tous les '1', tous les '2', etc. -, on utilise la formule : $nb[v]_n = S_{n-(v-1)} - S_{n-v}$ où "v" est la valeur particulière de '1' à 'n', avec $S_0 = 0$ pour $v = n$.

par exemple, pour savoir combien de '1' utilise la partition de '6', on aura : $nb[1]_6 = S_{6-(1-1)} - S_{6-1} = S_6 - S_5 = 112 - 48 = 64$; de même, la quantité de '2' utilisée par le même entier : $nb[2]_6 = S_{6-(2-1)} - S_{6-2} = S_5 - S_4 = 48 - 20 = 28$. etc. (voir ci-dessous le tableau de répartitions des valeurs singulières).

remarque : comme v prend, en fait, les mêmes valeurs que k, nous ferons l'économie d'un symbole et j'écris désormais $nb[k]_n$.

remplaçons les sommantes par leur produit $\delta_n P_n$. nous obtenons :

$$nb[k]_n = S_{n+1-k} - S_{n-k} = \delta_{n+1-k}P_{n+1-k} - \delta_{n-k}P_{n-k} \qquad \text{(II)}$$

avec, puisqu'il n'existe pas de partition de 0, $\delta_0 = 0$.

nous pouvons donc construire le tableau des répartitions des sommants par valeurs particulières 'k', dans lequel S_n est la sommante de n toutes valeurs confondues, et S_n ces mêmes sommants mais triés; évidemment $card(S_n) = card(S_n)$.

tableau de répartitions des valeurs singulières des sommants pour n.

k =	1	2	3	4	5	6	7	8	S_n	valeurs totalisées T_n
S_n=	1	1							1	1 x 1 = 1
2	2	1							3	2 x 1 + 1 x 2 = 4
3	5	2	1						8	5 x 1 + 2 x 2 + 1 x 3 = 12
4	12	5	2	1					20	2 x 1 + 5 x 2 + 2 x 3 + 1 x 4 = 32
5	28	12	5	2	1				48	T_5 = 80
6	64	28	12	5	2	1			112	T_6 = 192

7	144	64	28	12	5	2	1		256	$T_7 = 448$
8	320	144	64	28	12	5	2	1	576	$T_8 = 1024$

en colonne k = 1, la ligne n se lit $(S_n - S_{n-1})$. on la concatène (⊎) à la ligne n - 1, soit $n = (S_n - S_{n-1}) \uplus n - 1$. (cette suite est répertoriée A001792 et A045626 dans oeis)

par exemple : la suite $S_7 = (S_7 - S_6)$ ₪ S_6, soit $(256 - 112 = 144) \uplus$ 64;28;12;5;;2;1 c'est-à-dire S_7 = 144; 64; 28; 12; 5; 2; 1. les valeurs totalisées T_n des S_n sont telles que $T_n = 2^{n-1}n = \Sigma S_i$, i = 1 à n-1. de même $T_n = T_{n-1} + S_n$. et finalement :

$$T_n = 2^{n-2}(n - 1) + 2^{n-1}(n + 1)/2 = 2^{n-1}n = nP_n, \text{ etc.} \quad \text{(III)}$$

bâtis et sommantes.

voyons quelques propriétés évidentes des $\mathcal{B}_{n,k}$.

1- si k = n alors $\mathcal{B}_{n,n} = \delta_1 P_1 = 1$, c'est n lui-même;

2- si k = 1 alors $\mathcal{B}_{n,1} = \delta_n P_n - \delta_{n-1}P_{n-1} = 2^{n-1}(n + 1)/2 - 2^{n-2}n/2 = 2^{n-2}(n + 1) - 2^{n-3}n$. donc $\mathcal{B}_{n,1} = \min \mathcal{B}_n$, et $\mathcal{B}_{n,n} = \max \mathcal{B}_n$. on écrira : $os(n) = \{\mathcal{B}_{n,n}\ \mathcal{B}_{n,n-1} \ldots \mathcal{B}_{n,2}\ \mathcal{B}_{n,1}\}$.(voir p. 2)

l'équation (II) donne les termes de la suite os(n), on peut donc écrire $os(n) = \delta_{(n-k)+1}P_{(n-k)+1} - \delta_{n-k}P_{n-k} = \delta_{q+1}P_{q+1} - \delta_q P_q$, avec $q \geq 0$ et $\delta_0 = 0$ (c'est-à-dire k = n). de plus, soient deux entiers a et b tels que $os(a) = \mathcal{B}_a$, et $os(b) = \mathcal{B}_b$; nous avons : os(a+b) = os(a) + b termes de la suite infinie os(n) à partir de max(os(a)) = os(b) + a termes de la suite infinie os(n) à partir de max(os(b)) = os(b+a).

V - retour à la suite de fibonacci.

troisième.

1 - triangle de pascal, partages et suite de fibonacci.

on connaît la lecture traditionnelle de la suite de fibonacci "en diagona-le" du triangle de pascal, où on additionne les cœfficients d'une même diagonale. par exemple, en écriture tp $\mathcal{B}$, $F_4 = C^2{}_2 + C^3{}_1 = 2 + 1 = 3$.

	k = 1	k = 2	k = 3	k = 4 etc…
n = 0	1			
n = 1	1	1		
n = 2	1	2	1	
n = 3	1	3	3	1 etc…

pour lire F_n, on est donc obligé de construire le tp jusqu'à pouvoir lire le nombre de fibonacci en question, c'est-à-dire jusqu'à n. un autre algorithme, lié à la couverture de n est désormais accessible. on a déjà vu plus haut le calcul de couv(n) par la somme des nappes de n; la méthode va consister à écrire les partages en place dans le tp comme nous savons déjà le faire, calculer les nappes correspondantes et effectuer la sommation pour obtenir couv(n) = F_{2n}; à effectuer la même démarche pour couv(n+1) = F_{2n+2} ou couv(n-1) = F_{2n-2}, et ainsi obtenir $F_{2n+1} = F_{2n+2} – F_{2n}$.

exemple : soit à calculer F_8 et $F_9 = F_{10} - F_8$.

1°) on écrit la portion des C^n_k du tp $\mathcal{P}$ contenant la partition de l'entier ayant l'un des F_n "pairs" pour couverture, soit ici 4 → F_8.

n = 4 C^4_k 1 3 3 1

2°) puis on écrit sous chaque cœfficient les partages qu'il manifeste (les permutations sont notées une fois avec leurs cœfficients multiplicateurs)

nombre de sommants k	1	2	3	4
n = 4 C^4_k	1	3	3	1
partages $p_{4,k}$	[4]	[13]x2 $[2^2]$	$[1^2 2]$x3	$[1^4]$

3°) on calcule les nappes et on totalise, ce qui fournit couv(4) = F_8. on effectue la même procédure pour F_{10}.

nombre de sommants k	1	2	3	4	
n = 4 C^4_k	1	3	3	1	
partages $p_{4,k}$	[4]	[13]x2 $[2^2]$	$[1^2 2]$x3	$[1^4]$	
nappes	4	3x2=6 2x2=4	2x3=6	1	
couv(4)	4 +	10 +	6 +	1	= 21 = F_8

2 - "polynômes de fibonacci".

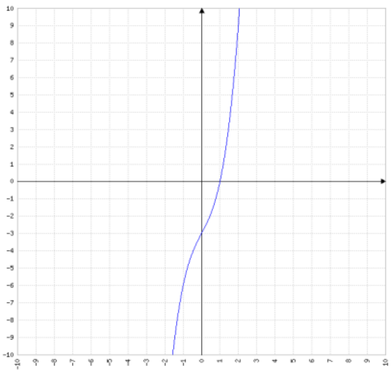
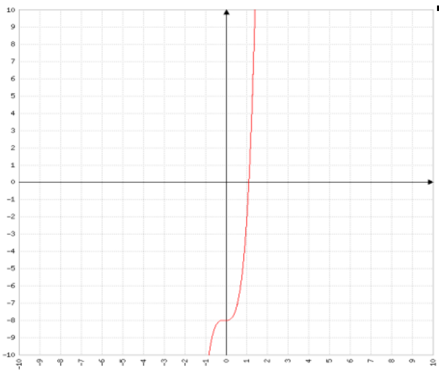
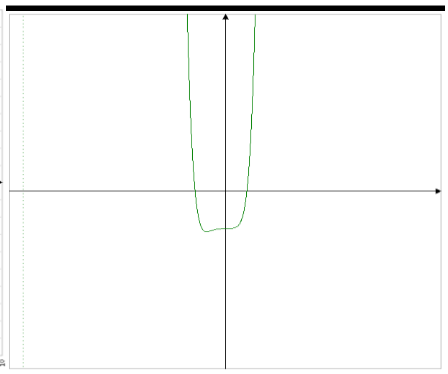
revenons aux formules liant couv(n) et nombres de fibonacci.

couv(n) = $F_{2n} = \Sigma C^{n+(k-1)}_{n-(k-1)}$, k = 1 à n pour les fibonacci pairs et pour les impairs $F_{2n+1} = \Sigma C^{n+k-1}_{n+2-k}$. chaque somme nous fournit un polynôme dont nous connaissons les valeurs puisque ce sont celles des F_n correspondants.

1° - fibonacci pairs : $F_{2n} = \Sigma C^{n+(k-1)}_{n-(k-1)}$, k = 1 à n.
voici la liste des premiers polynômes, de F_2 = couv(1) à F_8 = couv(4).

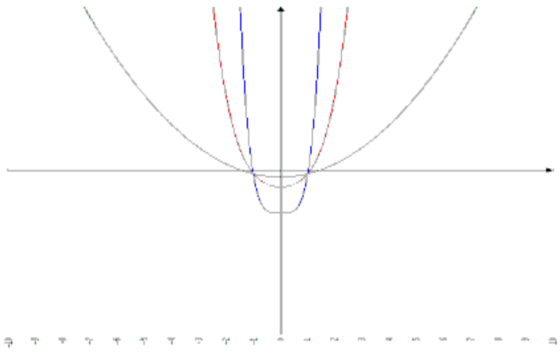
F_2 = couv(1) = $C^1_1 = x = 1$;
F_4 = couv(2) = $C^2_2 + C^3_1 = x^3 + 2xy = 3$;
F_6 = couv(3) = $C^3_3 + C^4_2 + C^5_1 = x^5 + 4x^3y + 3xy^2 = 8$;
F_8 = couv(4) = $C^4_4 + C^5_3 + C^6_2 + C^7_1 = x^7 + 6x^5y + 10x^3y^2 + 4xy^3 =21$.

on peut ainsi associer à chaque couv(n) = F_{2n} une courbe en {x, y} dont voici les tracés pour F_4, F_6 et F_8 :

$x^3 + 2xy – 3 = 0$ $x^5 + 4x^3y + 3xy^2 -8 = 0$ $x^7 + 6x^5y + 10x^3y^2 + 4xy^3 – 21 = 0$

<u>2° - fibonacci impairs $F_{2n+1} = \Sigma C^{n+k-1}_{n+2-k}$.</u>
il en est, bien sûr de même, voici représentées F_3, F_5 et F_7



le tp nous offre donc, par ses diagonales fibonaciennes, une liste infinie de "polynômes fibonacci" dont il reste à faire l'étude, notamment selon la théorie des systèmes dynamiques. voici la liste des huit premiers "polynômes de fibonacci", dont nous connaissons déjà les quatre premiers pairs.

$F_1 = C^0_1 = 1$
F_2 = couv(1) = $C^1_1 = x = 1$

$F_3 = C^1{}_2 + C^2{}_1 = x^2 + y = 2$
$F_4 = \text{couv}(2) = C^2{}_2 + C^3{}_1 = x^3 + 2xy = 3$
$F_5 = C^2{}_3 + C^3{}_2 + C^4{}_1 = x^4 + 3x^2y + y^2 = 5$
$F_6 = \text{couv}(3) = C^3{}_3 + C^4{}_2 + C^5{}_1 = x^5 + 4x^3y + 3xy^2 = 8$
$F_7 = C^3{}_4 + C^4{}_3 + C^5{}_2 + C^6{}_1 = x^6 + 5x^4y + 6x^2y^2 + y^3 = 13$
$F_8 = \text{couv}(4) = C^4{}_4 + C^5{}_3 + C^6{}_2 + C^7{}_1 = x^7 + 6x^5y + 10x^3y^2 + 4xy^3 = 21$

3 - nombre de sommants des F_n.

nous avons vu que le produit $kC^n{}_k$ donne la quantité totale de sommants $s_{n,k}$ de la case $C^n{}_k$ (voir ci-dessus, c1 p. 23), en conséquence, on peut associer un nombre, pour l'instant énigmatique, le nombre § (à lire : "gloup!") des sommants associés à chaque fibonacci : il suffit, évidemment, d'effectuer la somme de chaque case intervenant dans le F_n concerné. pour ce faire, on peut lire directement dans le polynôme F_n le cœfficient de chaque monôme et le multiplier par le rang que le monôme occupe dans le polynôme. par exemple dans $F_6 = x^5 + 4x^3y + 3xy^2$, les cœfficients sont 1 4 3 et donnent 1 x 1 + 4 x 2 + 3 x 3 = 18, etc.

voici la liste des douze premières "sommantes de fibonacci" §(F_n).

§(F_2) = 1, §(F_3) = 3, §(F_4) = 5, §(F_5) = 10, §(F_6) = 18, §(F_7) = 33, §(F_8) = 59, §(F_9) = 105, §(F_{10}) = 185, §(F_{11}) = 324, §(F_{12}) = 464, §(F_{13}) = 977…

pour chaque fibonacci nous pouvons calculer une "densité moyenne" des sommants entrant dans la composition du F_n, soit §(F_n)/F_n et dont voici les treize premiers termes :

1	1	3/2	5/3	½	9/4	33/13	59/21	105/34	37/11	324/89	29/9	977/233
1	1	1,5	1,66	0,5	1,25	2,53	2,80	3,08	3,36	3,64	3,22	4,19

si nous appliquons à la suite de fibonacci la même sommation qui sert à sa constitution (procédé qui, d'ailleurs peut être itéré à l'infini), nous obtenons la suite "somme de fibonacci" de second niveau (le premier étant la suite de fibonacci classique elle-même) $F_n = \Sigma F_n = F_{n+2} - 1$. et si nous appliquons à F_n l'algorithme de "densité moyenne", nous obtenons :

F_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89
$\mathcal{F}_n$	1	2	4	7	12	20	33	54	88	143	232
§(F_n)											

$\mathcal{F}_n$	1	½	¾	5/7	5/6	9/10	33/33	59/54	105/88	185/143	324/232
δ_n	1	0,5	0;75	0,71	083	0,9	1	1,09	1,19	1,29	1,39

VI - autres confluences.

a - espaces projectifs.

axiomes de base de la géométrie projective

- par deux points passe toujours une et une seule droite;
- deux droites se coupent toujours en un et un seul point, (les droites se coupent à l'infini);
- il existe un quadrangle n'ayant pas 3 points alignés.

lorsqu'une structure respecte ces trois axiomes, elle peut prétendre au titre de plan projectif. si, en plus, elle possède un nombre fini de points, on parlera de plan projectif fini.

construire des plans projectifs finis et propriétés de ces plans projectifs.

soit un plan projectif fini, il existe un entier n tel que :

- il contient $n^2 - n + 1$ points;
- il contient $n^2 - n + 1$ droites;
- chaque droite est composé de n points;
- par chaque point passe n droites.

on appelle ordre $\mathbb{P}^{(q)}$ du plan projectif le nombre $q = n - 1$. un plan projectif fini d'ordre q possède donc $q^2 + q + 1$ points et droites, chaque droite contient $q + 1$ points, chaque point à l'intersection de $q + 1$ droites. comparer avec le nombre de partages par orbitale d5 p19, et dénombrement p49.

écrivons, à partir de $\delta_q = (q + 1)/2$. $\delta^2_q = [(q + 1)/2]^2 = (q^2 + 2q + 1)/4$

d'où $4\delta^2_q - q = q^2 + q + 1 = P^{(q)}$. or nous avons $\delta_q = S_q/P_q = S_q/2^{q-1}$, donc $4\delta^2_q - q = S^2_q/2^{2q-4} - q$, soit $S^2_q/2^{2q-4} - q = q^2 + q + 1 = P^{(q)}$.

table des premières valeurs de S_q et de $P^{(q)}$ avec $q \geq 2$.

q =	2	3	4	5	6	7…
S_q =	3	8	20	48	112	256…
$P^{(q)}$	7	13	21	31	43	57…

(oeis : A002061-central polygonals numbers)

nous savons que $S_q = \delta_q P_q$ où P_q est la partition de q, c'est-à-dire son nombre de partages en sommants de 1 à q, avec $P_q = 2^{q-1}$. nous pouvons donc écrire : $P^{(q)} = S^2_q/2^{2q-4} - q = \delta^2_q P^2_q/2^{2q-4} - q$, d'où la valeur de P_q en fonction de $P^{(q)}$: $P_q = [\sqrt{(P^{(q)} + q)}] \times 2^{q-2}/\delta_q$.

b - nombre Q_n de régions d'un cercle produites par n cordes.

la division du cercle avec n cordes est donnée par la formule :

$Q_n = ½n(n + 1) + 1$. or $2\delta_n = n + 1$, d'où

$Q_n = n\delta_n + 1$. et $Q_{n+1} = Q_n + (n + 1) = \delta_n(n + 2) +1$.

n cordes	0	1	2	3	4	etc.
Q_n régions	1	2	4	7	11.. etc.	

(oeis A000784 as central polyg. numb. (the lazy contour' sequence))

c- plans projectifs et régions du cercle cordé.

$Q_n = n\delta_n + 1$ d'où $\delta_n = (Q_n – 1)/n$

en reportant dans $P^{(n)} = 4\delta^2_n – n$, on obtient

$P^{(n)} = 4[(Q_n – 1)/n]^2 – n = 4(Q^2_n – 2Q_n + 1)/n^2 – n$.

VII - 1ère synthèse.

jusqu'à présent j'ai associé séparément les partitions d'un entier à quatre champs différents. je me propose de réunir ces cinq notions à partir de la densité δ_n.

1°) $\delta_n = S_n/P_n$ (voir : densité de sommants, ci-dessus)

2°) $\delta_n = \Sigma n/n$ (voir : densité des sommants, ci-dessus)

3°) $\delta_n = \Phi – (n - \sqrt{5})/2$ (voir : partitions et nombre d'or, ci-dessus)

4°) $\delta_n = \sqrt{(P^{(n)} + 2)}/2$ (voir : construire des plans projectifs…, ci-dessus)

5°) $\delta_n = (Q_n – 1)/n$ (voir : nombre Q_n de régions…,ci-dessus).

par exemple (2°) et (5°) donnent $Q_n = \Sigma n + 1$, etc.

deuxième partie - symbolique.

I – orbite de la partition d'un entier

a - orbitales.

les partages se répartissent en orbitales ${}^nw_i = \omega\{p_j(n)\}_i$ ainsi nommées du fait de leur cyclicité et dont nous verrons plus loin la construction.et où le symbole ω correspond au petit programme :

étape 1 entrer un partage $p_j(n)$; $A = p_j(n)$

ét. 2 appliquer l'effecteur g_j sur $p_j(n)$: $B = p_{j+1}(n) = g_j [p_j(n)]$

$B = A$?

si oui stop

si non $g_j = g_{j+1}$; $B = g_jB$; retourner à l'ét. 2

les orbitales d'un entier n constituent son orbite $W_n = \{{}^nw_i\}$. l'orbite d'un entier est une représentation de sa partition (voir l'algorithme ci-dessous).

d4 - le nombre d'orbitales de l'entier n est : ${}^{n}w_i = 2^{n-q-2}$, et

d5 - son nombre de partages par orbitale est :

$$p({}^{n}w_i) = p(n)/{}^{n}w_i = 2^{n-1}/2^{n-q-2} = 2^{q+1}.$$

en d'autre termes, l'orbitale ${}^{n}w_i$ est un cycle modulo 2^{q+1}.

d6 - pour un index q donné le nombre total des partages est :

$$P_n = \mathrm{card}(I_q) \times p({}^{n}w_i) = 2^q \times 2^{q+1} = 2^{2q+1}.$$

je rassemble toutes les données d1 (voir plus haut p3) à d6 dans le tableau des premières valeurs des orbites. ($[I_n]$ remplace I_q).

on se rend compte que ces valeurs deviennent très vite très grandes

q	$[I_n]$	I_n	n	$P(n)$	w_i	$p(w_i)$
0	2, 2	1	2	2	1	2
1	3, 4	2	3	4	1	4
			4	8	2	4
2	5, 8	4	5	16	2	8
			6	32	4	8
			7	64	8	8
			8	128	16	8
⋮	⋮	⋮	9	256	16	16
			⋮	⋮	⋮	⋮

$$[I_n] = [2^q + 1,\ 2^{q+1}]$$
$$I_n = 2^q$$
$$P(n) = 2^{n-1}$$
$$w_i = 2^{n-q-2}$$
$$p(w_i) = \frac{P(n)}{w_i} = 2^{q+1}$$

b - partition d'entier par l'algorithme ape.

1 - deux consignes :

(a) extraire 1 de n, puis de n - 1 jusqu'à épuisement des unités de n, et

(b) à chaque étape, additionner les unités extraites.

cela suffit pour obtenir la totalité des combinaisons de sommants d'un entier. à chaque étape une opération est effectuée sur un élément à la fois, pas à pas; l'analyse n'oublie aucun élément ni aucune de leurs recombinaisons.

on peut considérer qu'il n'y a pas de partition de [1] ([1] étant à lui-même sa propre partition) – sauf à sous-entendre le "0", mais alors il y aurait une infinité de partitions de n'importe quel entier, ce qui serait une "zénonification" de l'algorithme lui ôtant toute opérativité (la partition n'est pas une atomistique) – et écrire P(1) = Ø. quand il y a "1" il y a "1" et c'est tout. la seule activité qui reste est de l'additionner à un autre "1" qui, en l'occurrence, n'est pas là mais "1" étant le plus petit sommant des autres entiers, il est concordant qu'il soit son propre et unique sommant.

2 - écrire les partitions; l'algorithme.

un partage $p_j(n) = s_{j,1} + s_{j,2} + \ldots + s_{j,k}$ avec $s_{j,i} \neq 0$. (voir p2)

chaque partage $p_j(n)$ équivaut à une ligne de l'orbitale et est représenté par une suite entre crochets $p_j(n) = [s_{j,1}\ s_{j,2}\ \ldots\ s_{j,k}]$. (les sommants sont toujours contigus). du partage $p_j(n) = [s_{j,1}\ s_{j,2}\ \ldots\ s_{j,k}]$ (ligne j de l'automate), nous générons le partage $p_{j+1}(n)$ (ligne j+1). nous lisons $[s_{j,1}\ s_{j,2}\ \ldots\ s_{j,k}]$ de gau-che à droite. les modes élémentaires – ou cellules – (j'utilise indifféremment les mots "mode" , "cellules" selon la "dynamique" exposée) de génération sont :

a – <u>la fission φ.</u>

soient $s_{j,k}$ les sommants du partage $p_j(n)$; il y a quatre configurations possibles $s_{j,k}$ = [gmh], selon que g et h, suites d'entiers quelconques sauf que l'élément de g contigu à m est nécessairement ≠ 1 (car le motif 1m est tributaire d'α, (voir ci-dessous), sont nuls ou non, avec card(g, h) = k – 1. alors φ génère ("→") les sommants du partage $p_{j+1}(n)$:

$\varphi s_{j,k} = \varphi[g s_{j,i} h] = \varphi[gmh] \rightarrow s_{j+1,k'} = [g' s_{j+1,v} s_{j+1,v+1} h'] = [g'1(m\text{-}1)h']$, card(g', h') = k' – 2.

soit la cellule φ :

$$\begin{array}{c} [\ldots m \ldots] \\ \varphi \quad \swarrow\searrow \\ [\ldots 1(m\text{-}1)\ldots] \end{array}$$

b – <u>la fusion-fission α.</u>

soit $p_j(n) = s_{j,k} = [g(s_{j,i-q}\ldots s_{j,i-1})s_{j,i}h] = [g(1\ldots1)mh]$ avec card(g, h) = k – (m + 1); m ≥ 2 précédé d'une suite de '1' en quantité q ≥ 1, (1^q), alors α génère les sommants du partage $p_{j+1}(n)$.

$\alpha s_{j,k} = [g(s_{j,i-q}\ldots s_{j,i-1})s_{j,i}h] = \alpha[g(1^q)mh] \rightarrow s_{j+1,k'} = [g' s_{j+1,v} s_{j+1,v+1} h'] = [g'(q+1)(m\text{-}1)h']$ avec card(g', h') = k' – 2.

soit la cellule α

$$\begin{array}{c} [\ldots(1^q)(m)\ldots] \\ \alpha \quad \searrow\swarrow\ \searrow \\ [..(q+1)(m\text{-}1)\ldots] \end{array}$$

c – <u>la fusion des unités Σ</u>

il y a deux configurations possibles $s_{j,m} = [g1^q]$ selon que la suite de sommants g est nulle ou non (si le dernier élément de g contigu à 1^q valait '1', 1^q deviendrait 1^{q+1}) (a) $p_j(n) = s_{j,n} = [1^n]$, suite ininterrompue de '1' en quantité n ≥ 2, alors Σ additionne tous ces '1' et génère le sommant du partage $p_{j+1}(n)$: $\Sigma s_{j,n} = \Sigma[1^n] \rightarrow s_{j+1,1} = [n]$. (b) $p_j(n) = s_{j,k} = [g1^q]$, sans autre sommant à droite de 1^q, g non nulle avec dernier sommant $\neq 1$ et $q \geq 2$; alors Σ génère les sommants de $p_{j+1}(n)$: $\Sigma s_{j,k} = \Sigma[g1^q] \rightarrow s_{j+1,k'} = [g'q]$. avec card g = k – q et card g' = k' – 1.

soit la cellule Σ : $[1^m]$ éventuellement $[g \quad 1^q]$.

$$\Sigma \quad \searrow\swarrow \qquad\qquad \Sigma \quad \swarrow\searrow \; \searrow\swarrow$$

[m] éventuellement [g' q].

d – <u>l'identité id.</u> ne s'utilise qu'avec φ et α à sa gauche.

si à droite du partage $p_j(n) = s_{j,k}$ ne se trouve qu'un seul 1, $s_{j,k} = [g1]$, card(g) = k – 1, alors id le reproduit (→) tout simplement : $ids_{j,k} = id[g1] \longrightarrow s_{j+1,k'} = [g'1]$.card(g') = k' – 1. soit la cellule id :

$$\begin{array}{cc} & [g \;\; 1] \\ id & \swarrow\searrow \; \downarrow \\ & [\;\; g' \; 1] \end{array}$$

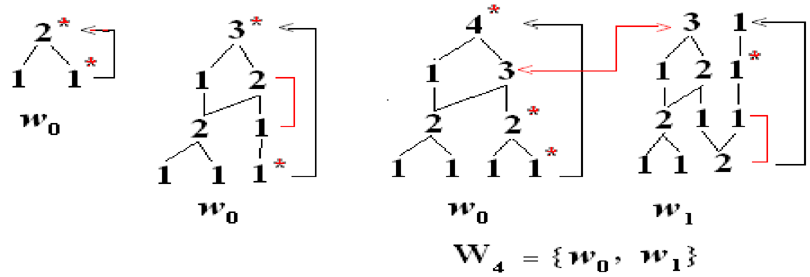
3 - <u>inspirations</u> : formellement, il est loisible d'interpréter l'opérateur simple α comme l'intrication (₪ à lire "shekel") virtuelle orientée de Σ "↘↙" et de φ "↙↘", soit l'opérateur composé Σφ, inverse de φΣ; on pourrait écrire α = Σ ₪ φ = ↘↙ ₪ ↙↘ = ↘↙↘, l'intrication ayant pour effet d'effacer une des flèches parallèles contigües. on a la compression virtuelle : $1^m n \longrightarrow [m\,[1(n-1)]] \longrightarrow [(m+1)(n-1)]$. dans la visée de ce texte, la combinaison réelle de l'opérateur composé φΣ n'est pas commutative, c'est-à-dire que le pseudo-opérateur Σφ ne peut exister sans introduire d'incohérences dans le processus. de même, on pourrait aussi considérer id comme un Σ à un argument, Σ_1 (et donc Σ est équivalent à $\Sigma_{q\geq 2}$), ce qui ferait de Σ et φ les deux seuls opérateurs de la théorie. on écrirait, par ex : ω = <Σ_k₪$^\varepsilon\varphi^\varepsilon$> = <↘↙$_k$ ₪$^\varepsilon$ ↙↘$^\varepsilon$ >: avec, si ε = 1 alors k ≥ 1, et ω = <$\Sigma_{\geq 1}$₪φ> = <↘↙↘> = α, soient le générant $g_a = [1^m n]$ et le généré $g_é$ = [(m+1)(n - 1)]. et si ε = 0, alors k = 1 et ω = <Σ_1₪$^0\varphi^0$> = <Σ_1> = <↘↙$_1$ > = <↓> = id. dans ce texte, je n'ai pas l'usage de cette écriture, elle reste cependant séduisante pour sa concordance avec les opérateurs de génération et sa résonance avec d'autres théories.

4 - je nomme mode générant, et je note g_a, le partage initial, générateur g^a l'effecteur de la génération et mode généré $g_é$ le partage obtenu selon la syntaxe g_a - $g^a{}_é$ - $g_é$. à ces modes-effecteurs s'ajoute la symétrie miroir s qui relie (↔) deux partages inverses miroirs l'un de l'autre, de la même orbitale ou non. les deux partages ont donc nécessairement le même nombre de sommants puisqu'inverses.

$s[s_{j,1}s_{j,2}\ldots s_{j,k-1}s_{j,k}]_{wi} \leftrightarrow [s_{j,k}s_{j,k-1}\ldots s_{j,2}s_{j,1}] = [s_{j',1}s_{j',2}\ldots s_{j',k-1}s_{j',k}]_{wi'}$, avec i = ou ≠ i'.

soit la cellule s : $[abc\ldots jkl\ldots xyz]_{wi} \leftrightarrow [zyx\ldots lkj\ldots cba]_{wi'}$.

nous disposons donc de quatre modes-effecteurs simples qui se combi-nent selon des règles (voir ci-dessous : mots-nombres) et d'une symé-trie dont le rôle est de compléter l'orbite de l'entier à partir de toute orbitale possé-dant un seul partage de la paire non palindrome. pour familiariser l'usage, j'écris les partitions de n = 2, 3 et 4.



5 - <u>commentaires</u>.

pour simplifier la lecture, je remplace tous les symboles particuliers des effecteurs de générations par l'unique signe "=".

chaque ligne de l'algorithme correspond à un partage qui génère la ligne suivante. par facilité, je situe le chiffre 'n' en tête d'une arbores-cence que, pour cette raison, je nomme son orbitale w_0.

les palindromes sont accompagnés d'un astérisque (*). chaque par-tage non palindrome est associé à son inverse miroir, indiqué par une flè-che rouge, ce qui nous assure de n'en oublier aucun. puisque tous les partages ne figurent pas nécessairement dans une seule orbitale, les in-verses miroirs permettent de constituer les orbitales complémentaires, ce qui est initié par n = 4. tous les in-verses présents nous assurent que toutes les orbitales ont été écrites, conformément aux formules.

l'orbite W_4 de '4' est constituée de deux orbitales reliées entre elles par la symétrie miroir figurée par les flèches rouges.

φ[2] = [11] (lire [un un]) et Σ[11] = [2]; φ[3] = [12] et α[12] = [21], puis (φid)*[21] = [111] d'où Σ[111] = [3]; α[13] = [22], (φφ)*[22] = [1111], … , (αid)[121] = [211], (φΣ)[211] = [112], α[112] =[31]; etc. par circularité on écrit, par ex., Σφ[2] = [2].

*les effecteurs composés entre () sont composés d'effecteurs élé-mentai-res contigus agissant simultanément sur le générant g_a; à ne surtout pas confondre avec les effecteurs qui se succèdent dans la génération de l'orbitale. les successions d'effecteurs sont des couplages que je nom-me mots-nombres et dont je parlerai plus loin. les calculs concernant les orbitales sont donnés ci-dessus en d4, p35.

6 - mon point de vue.

(a) certains partages sont des permutations les uns par rapport à d'autres; dans l'algorithme je les considère toutes comme des partages différents. (voir p7 couverture d'un entier), la symétrie miroir s, ou permutation circulaire, est un cas particulier de ces permutations.

(b) les partages se répartissent donc en deux clans : les palindromes, et les symétriques qui sont couplés à leur inverse miroir; dans cette optique, les partages en sommants inverses ne sont pas commutatifs.

la tradition combinatoire omet les permutations des partages et perd ainsi toute l'information sur l'orbitalisation des entiers (sylvie heubach et toufik mansour les nomment " n-colors compositions" in "combinatorics of compositions and words", coll. discrete mathematics and its applications., 2010, chap.3 compositions, def.3.21, page 76).

exemples : les deux partages [123] et [312] de "6" qui ne sont pas inver-ses, ont des effecteurs inverses

```
              1 2   3                 3 1 2
αφ            \/\   /\        φα      /\  \/\
              2 1 12                 12  21
```

qui ne génèrent pas de partages inverses; et les deux partages inverses [123] et [321] n'ont pas d'effecteurs inverses, (αφ) que nous venons de voir et (2φid).

```
                        3    2   1
φφid = 2φid            / \  / \  |
                       1 2  1 1 1.
```

une orbitale étant cyclique, aucun partage n'est le premier ni le dernier. on peut assimiler une orbitale à un graphe connexe appliqué sur un cylindre vu "horizontale ment" ou "couché" (voir annexe cobordisme).

comme dit plus haut, c'est pour des raisons pratiques et de lisibilité que je fais commencer une orbitale, l'orbitale w_0, par son partage le plus "petit" en nombre de sommants, le chiffre 'n', représentant le nombre [n], étant le plus petit d'entre tous, et [11...1] = [1^n] = n le plus "grand". c'est pourquoi, ici, les sommants extrêmes ne sont pas précédés, pour les partages en "tête", ni suivis, pour les partages en "fin" d'orbitale, de leurs flèches de déclinaison algorithmique que je remplace par une flèche "remontante" unique.

on peut faire l'observation suivante : lorsqu'on écrit une orbitale, celle-ci est composée des partages en sommants du nombre [n], comme nous le savons, représentés par les lignes de l'orbitale.

<u>couverture et orbite d'un entier</u>

a) appelons $({}^n\pi_j)_i$ le j-ème partage (la j-ème ligne) de l'orbitale ${}^nw_i$ de l'entier [n], on écrit $nap({}^n\pi_j)_i = s_{j,1} \times s_{j,2} \times \ldots \times s_{j,k} = \Pi_k(s_{j,k})$, k = 1 (n lui-même) à n (la suite $[1^n]$ = n) avec la convention nap(n) = n.

je nomme forme de l'orbitale ${}^nw_i$ la somme de toutes ses nappes.

$$form({}^nw_i) = \Sigma_j\Pi_k s_{j,k},\ j = 1 \text{ à } 2^{q+1}, \text{ selon d5.}$$

et couv(n) la somme de toutes ses formes : $couv(n) = \Sigma_i\Sigma_j\Pi_k s_{j,k}$.

voyons cela sur les orbitales des quatre premiers entiers. à côté de chaque partage sa nappe avec nap(n) = n.

⥁1	<u>1</u>	2	2	3	3
<u>couv(1)</u> = 1		1 1	1 x 1 = <u>1</u>	1 2	1 x 2 = 2
			couv(2) = 3	2 1	2 x 1 = 2
				1 1 1	1 x 1 x 1 = <u>1</u>
					couv(3) = 8

4	4	3 1	3 x 1 = 3
1 3	1 x 3 = 3	1 2 1	1 x 2 x 1 = 2
2 2	2 x 2 = 4	2 1 1	2 x 1 x 1 = 2
1111	1 x 1 x 1 x 1 = <u>1</u>	1 1 2	1 x 1 x 2 = <u>2</u>
	$form(4_0) = 12$		$form(4_1) = 9$

et $form(4_0) + form(4_1) = couv(4) = 21$.

b) une orbite W_n - c'est-à-dire, ne l'oublions pas, l'ensemble total des partages en som-mants de l'entier n, soit ce que je nomme la partition de n - est constituée de l'ensemble de ses orbitales. si pour chaque orbite W_n nous effec-tuons la somme de toutes ses formes nous obtenons la couverture de l'entier n, soit $couv(W_n) = couv(n)$.

en sommant les formes (ce qui équivaut à sommer les nappes de tous les partages qui composent la partition de n, voir p8) alors :

$$couv(n) = \Sigma_i form({}^nw_i) = \Sigma_{i,j}\Pi_k s_{j,k},\ i = 1 \text{ à } 2^{n-q-2} \text{ (d4)},\ j = 1 \text{ à } 2^{q+1} \text{ (d5).}$$

de 1 à 3, les couvertures s'identifient à leurs formes. à partir de l'entier 4, la couverture est la somme d'au moins deux formes et nous avons ainsi ci-dessus couv(4) = form(4_0) + form(4_1) = 21.

les nappes sont indépendantes des orbitales; les formes, quant à elles sont celles des orbitales.

C - couplages, conjugaisons, partages

1 - dans les théories habituelles des partitions, celles-ci sont traitées de manière "anonyme" sans liens entre elles autres que des opérations qui leurs sont extérieures. avec ape, les partitions sont reliées par des opérations "génétiques" plus complexes; chaque mode/effecteur de l'algorithme transforme de manière univoque un partage en un autre du même entier. chaque partage a donc deux parents, celui dont il provient et celui qu'il engendre par l'action des effecteurs qui, eux-mêmes sont reflets des configurations des partages auxquels ils s'appliquent. à quoi s'ajoute la symétrie miroir s qui permet de construire toutes les orbitales des entiers. ainsi l'ensemble des partages p(n) d'un entier n, sa partition P(n), est un ensemble fini et clos par ape. les effecteurs de générations et la symétrie miroir composent un ensemble formel $\mathfrak{g}$ = {φ, α, Σ, id, s} qui permet de former deux types de mots : les couplages, effecteurs simples ou composés, qui se suivent génération après génération pour produire les générations successives de partages d'une orbitale, et les conjugaisons, effecteurs simples ou composés concaténés qui s'appliquent aux différentes portions contigües d'un même partage pour produire le partage suivant.

couplages et conjugaisons n'obéissent pas aux mêmes règles de compatibilité, nous le verrons plus loin. les partitions d'un entier sont donc le produit de trois opérateurs : le partage, le couplage et la conjugaison.

le point de départ "physique" de la machine est n lui-même sous la forme de son chiffre 'n' en base 10, non nécessairement (n'importe lequel des partages de n convient), mais par facilité puisque 'n' est donné. c'est l'initialisation de l'orbitale w_0 qui par suite engendrera tout W_n. on lit "g appliqué à ${}^n w_0$ génère W_n" : $g({}^n w_0) \Rightarrow W_n$. plus complètement $g({}^n w_i) \Rightarrow W_n$.

à chaque mode correspond une configuration spécifique de partage comme vu p37, partie symbolique : les cellules de générations; – le tout formant la cellule génératrice. il y en a donc quatre, et quatre configurations produites.

ce sont ces configurations que j'ai nommées motifs générants (ou plus simplement générants) et motifs générés (ou plus simplement générés). on a la syntaxe: générant – générateur – généré, en abrégé g_a – $g^a{}_é$ – $g_é$, répétée autant de fois que l'orbitale contient de partages (voir p36, d5 : 2^{q+1}). du fait de la cyclicité. chaque g_a est aussi $g_é$ selon le diagramme, à lire dans le sens horaire, les formules accompagnant les flèches représentent l'opération complète :

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & g^{aj}{}_{éj+1} & & & \\
 & g_{aj}/g_{éj} & & \Rightarrow & & g_{éj+1}/g_{aj+1} & \\
g^{aj-1}{}_{éj} & \Uparrow & & & & \Downarrow & g^{aj+1}{}_{éj+2} \\
 & & g_{aj-1}/g_{éj-1} & & g_{éj+2}/g_{aj+2} & & \\
g^{aj-2}{}_{éj-1} & & \Uparrow & & \Downarrow & & g^{aj+2}{}_{éj+3} \\
 & . & & & & . & \\
g^{aj+k}{}_{éj+k+1} & \Uparrow & & & & \Downarrow & g^{aj+k-2}{}_{éj+k-1} \\
 & g_{aj+k}/g_{éj+k} & & \Leftarrow & & g_{aj+k-1}/g_{éj+k-1} & \\
 & & & g^{aj+k-1}{}_{éj+k} & & &
\end{array}
$$

et cela autant de fois que l'orbite de n contient d'orbitales (d4 : 2^{n-q-2}).

2 - <u>mots-nombres</u>

chaque cellule peut donc recevoir l'appellation de nombre-mot formée de nombres (les sommants) et du mot-nombre formé par l'effecteur associé. l'ensemble des nombre-mots d'une orbitale forme son mot-nom-bre chaque cellule étant portion du mot-nombre de l'orbitale, chaque orbitale d'une orbite porte son mot-nombre partiel constitutif du mot-nombre complet de l'orbite c'est-à-dire de l'entier considéré. je montre pourquoi l'appellation de mot-nombre est légitime.

chaque cellule est une entité singulière déterminée, au premier chef, par son générant. c'est en effet en tant qu'image du g_a qu'apparait l'effecteur g^a; g_a et g^a sont donc liés selon nos définitions. ils manifestent le sens de la génération $g_a \rightarrow g_é$ que j'écris $g_a g^a{}_é = g_é$. mais regardons ce qu'il en est dans l'autre sens, à savoir le g_a est-il déterminé par le g^a? en d'autres termes, la donnée d'un effecteur g^a restitue t'elle le mode g_a? voyons cette question directement sur des cellules spécifiques.

soit l'orbitale [2]φ[11]Σ[2]; son mot-nombre est φΣ (ou Σφ ce qui revient au même vu la circularité de l'orbitale). admettons que nous ne connaissions pas la valeur de m (ici 2) et écrivons l'orbitale abstraite correspondant au mot-nombre φΣ :

```
           m
φ        /  \
        1   m-1
Σ        \  /
          m
```

puisque Σ ne fusionne que des '1', cet exemple particulièrement simple montre que m – 1 = 1 donc m = 2 ce qui fournit, en restituant leurs valeurs numériques aux sommants, l'orbitale manifeste de 2 :

```
          2←
φ        /  \
        1    1     Σ
```

je peux donc affirmer, puisque le mot φΣ restitue intégralement l'orbitale de 2 et exclusivement elle, qu'il s'agit bien du mot-nombre 2.

effectuons un autre essai et demandons-nous s'il existe un mot φφ (noté $φ^2$ – à ne pas confondre avec la configuration 2φ = $2g^a$, générateurs contigus appliqués à un même partage et placés entre parenthèses). l'orbitale abstraite débute par :

```
          m
φ        /  \
        1  (m-1)
```

à ce stade, nous voyons bien que le deuxième φ n'est pas applicable au partage [1(m-1)] exclusivement redevable d'α. donc $φ^2$ ne peut être inclus dans un mot-nombre, un φ ne peut suivre un φ, et plus généralement un effecteur ne peut se suivre lui-même, sauf id par définition.

deux possibilités s'offrent : ou Σ, que nous avons déjà rencontré pour 2, ou α si m-1 ≥ 2. faisons cette hypothèse :

```
              m
φ           /  \
          1    m-1
α           \   /  \
             2    m-2
```

nous remarquons, en outre, que φα ne suffit pas pour établir un mot-nombre. en effet nos formules nous indiquent (d4, nombre de partages par orbitale = 2^{q+1}, où q est l'index de l'intervalle contenant n, voir ci-dessus d1) que seul 2 n'a que deux partages et donc, ce faisant, tout autre mot-nombre que φΣ est nécessairement ≥ 4; il faudra donc ajouter deux (au moins, exactement $2(2^q - 1)$, avec q ≥ 1) autres générateurs à φα pour obtenir les mots-nombres suivants à commencer par celui qui représentera l'entier 3 à quatre partages.

3 - <u>couplages d'effecteurs (modes).</u>

il est donc temps, afin de constituer les mots-nombres associés à leurs entiers n, de présenter la table des compatibilités des couplages de générateurs (modes/effecteurs), effecteurs qui sont appelés à se suivre dans la constitution des orbitales, chacun étant la conséquence immédiate de son prédécesseur et la cause immédiate de son successeur, le tout étant chaîné dans cet ordre afin de constituer le mot-nombre circulaire de leur orbitale. cette circularité constitue l'opérateur identité $0^q{}_n$ des orbitales ${}^n w$ (à ne pas confondre avec id), qui fait correspondre un partage à lui-même. l'opérateur $0^q{}_n$ vaut donc 0 modulo 2^{q+1} (voir d5, p36).

<u>table des compatibilités des couplages de 2 générateurs (modes/effecteurs).</u>
chaque case contient la succession des événements dans le sens g ☞ g.

☞	φ	α	Σ	id
φ	🛇*	m⇒1(m-1)⇒2(m-2)	(2⇒11⇒2)!!	🛇
α	1^mn⇒(m+1)(n-1)⇒1m1(n-2)	🛇	🛇	🛇
Σ	1^m⇒m⇒1(m-1)	🛇	🛇	🛇
(id	🛇	🛇	🛇	1⇒1⇒1)

le signe "!!" signifie "unique cas où φ et Σ se suivent".
table qu'on peut représenter par le diagramme :

$$n = 2$$
$$\Sigma \leftarrow\cdots\rightarrow \varphi \longleftrightarrow \alpha \dashrightarrow id\circlearrowleft$$

les flèches à deux sens indiquent que les effecteurs peuvent se suivre dans un sens ou dans l'autre; φΣ n'apparaît que dans le seul cas où n = 2, ce qu'indique la portion de flèche tiretée dans le sens φΣ, pour $n \geq 2$, Σ entraîne invariablement φ, ce qu'indique la flèche pleine dans le sens Σφ, mais l'inverse n'est jamais vrai. φ et Σ, en tant qu'effecteurs simples n'apparaissent qu'une seule fois dans une orbite et génèrent l'orbitale que je nomme (arbitrairement), pour cela, orbitale 0 de l'entier n, et ce quel que soit l'entier n; ils forment une base simple et immédiate de toutes les orbites. pour id la flèche tiretée indique que cette occurrence s'effectue dans un seul cas (lorsque id "tombe" en même temps que α). ce qui fournit les quatre 2-couplages : φα, αφ, φΣ, Σφ, et xid. id, étant toujours le dernier composant d'un effecteur composé ($x \in \{\varphi, \alpha\}$), soit se reproduit comme dernier composant de l'effecteur suivant différent de Σ, soit se fond dans un Σ suivant. en fait, ce tableau se complique du fait que dans le processus de génération peuvent apparaître des sommants voisins (portions de conjugaisons, voir plus loin), à gauche ou à droite, qui offrent la possibilité à un effecteur ⃠ de se manifester. je le montre sur quelques exemples concrets. la table peut s'augmenter par des couplages de plus de 2 générateurs, par puissances de 2 comme le montrent les formules.

<u>rappel</u> : aucun effecteur n'est couplé à lui-même hormis id dont c'est la définition et qui n'apparaît toujours que comme effet d'une réduction à l'unité de la valeur de la dernière portion du partage antécédent, toujours à l'extrémité droite du partage produit, et dont le destin est d'être absorbé par un Σ.

exerçons-nous en créant le germe d'un mot. soit le 3-couplage φαid; la table nous dit qu'α ne peut être suivi de id que si le sommant contigu à gauche de id dans le partage est ≥ 2; voici l'automate dont je compresse l'écriture en plaçant sur la même ligne le partage généré et l'effecteur qui le génère précédé de "par", effecteur qui s'applique sur le partage précédent, le générant donc). le schéma général d'automate est donc :

g_a	par $g^{é}_{a-1}$	
g_{a+1}	par $g^{é}_{a}$	
.	.	
↓	↓	
.	.	
$g_{k=a-1}$	par $g^{é}_{k-1}$	etc…).

par exemple, en initialisant par {m, φ(m)} :

m par Σ
1(m-1) par φ
2(m-2) par α
1 1 x par φ et g^{m-2}

id n'est pas le suivant direct de α et φαid n'est donc pas un germe conforme d'un mot-nombre. mais finalisons ce cas. le partage obtenu, et donc le mode-effecteur applicable, dépend de la valeur de x :

1) ou x = 1, alors m = 3 et g^{m-2} = id, d'où le partage [111] sur lequel s'applique Σ et le partage généré est 3 lui-même. le mot-nombre est donc φα(φid)Σ = 3.

2) ou x ≥ 2, c'est-à-dire m ≥ 4. si m = 4, alors m – 2 = 2 et x = [11], alors $g^{m-2} = g^{112}$ = α et la portion de mot-nombre est φα(φα)*.qui représente un entier ≥ 4, 4 lui-même que nous connaissons, orbitale w_0 de 4 qui en comporte deux (voir d4 ci-dessus : 2^{n-q-2}) ou un nombre supérieur.

*note sur les parenthèses. elles permettent de distinguer g^1g^2 couplage de générateurs compatibles (voir table ci-dessus) appliqués à deux partages successifs et produisant deux partages à partir du générant initial, de (g^1g^2) compagnons contigus (portion de conjugaison) de génération - et non nécessairement compatibles au sens de la table - sur le même partage. ne produisant qu'un partage à partir du partage initial. il ne faut donc pas confondre le couplage g^1g^2 c'est-à-dire g^{a1} suivi de g^{a2}, en "cascades", et (gg=2g) portion de conjugaison constituée de deux occurrences simultanées et contigües du même générateur. autrement dit : les couplages forment des mots "verticaux" et les conjugaisons des mots "horizontaux".

voyons maintenant ce que donne φαφ.

m
1(m-1) par φ
2(m-2) par α
11 x par φ et g^{m-2}

pour la suite tout dépend de x :

soit x = 1, et donc c'est Σ qui suit, et m = 3 et $g^{m-2} = g^{3-2} = g^1$ = id et l'on retrouve le mot-nombre 3,

soit x ≥ 2, donc m ≥ 4 et alors $g^{m-2} = g^{x\geq 2}$ = φ, ce qui donne le germe φα(2φ). qui s'écrit :

m par Σ si m-3=1

1(m-1) par φ
2(m-2) par α
111(m-3) par 2φ
x par $g^{111(m-3)}$

là encore, deux configurations possibles selon la valeur de m - 3.

ou m – 3 = 1 et donc m = 4 et $g^{1111} = \Sigma$, le mot-nombre complet obtenu est φα(2φ)Σ = 4_0, dont l'automate est :

m
1(m-1) par φ
2(m-2) par α
111(m-3=1) par φφ
m par Σ

ou m – 3 ≥ 2 et donc $g^4 = \alpha$. m – 3 ≥ 2 signifie que α agira en fusionnant 1^3 à une unité de m – 3 ce qui aboutira au partage 4(m-4) = [$4m_{\geq 5}$]sur lequel de nouveaux effecteurs s'appliqueront, etc. voici la séquence orbitale obtenue :

m
1(m-1) par φ
2(m-2) par α
111(m-3) par (φφ)
4(m-4) par α etc.

on remarque que l'orbitale atteindra au moins 8 partages et sera donc l'une des multiples orbitales d'un entier supérieur à 5 (voir annexe orbites). revoyons l'automate explicite de 4_0. la dernière ligne n'est plus nécessaire puisqu'elle est la même que la première dans laquelle l'information est reproduite.

4 par Σ
13 par φ
22 par α
1111 par 2φ

s (symétrie miroir) appliquée à [13] produira [31] partage de l'orbitale 4_1. φα(2φ)Σ = 4_0. ce nombre-mot est partiel puisqu'il ne donne pas tout 4. pour cela il faut donc former l'orbitale 4_1 dont nous savons par nos formules qu'il n'y en a pas d'autres. voyons cette orbitale que j'initialise par [31].

3 1	par α
12 1	par (φid)
211	par (αid)
112	par $(\varphi\Sigma)$

le mot-nombre 4_1 est donc $(\varphi id)(\alpha id)(\varphi\Sigma)\alpha = 4_1$.

nous pouvons, à ce stade, recenser les premiers mots-nombres à notre disposition. en nous servant du signe & nous écrivons le mot-nombre complet 4 (voir annexe du mot-nombre au nombre).

id = [1], par définition

$\varphi\Sigma$ = [2]

$\varphi\alpha(\varphi id)\Sigma$ = [3[

$\varphi\alpha(\varphi\varphi)\Sigma\&(\varphi id)(\alpha id)(\varphi\Sigma)\alpha = [4_0]\&[4_1] = \text{concat}([4_0], [4_1]) = [4]$.

les mots-nombres sont circulaires évidemment, et même permutables. on voit tout de suite que ces mots-nombres deviennent très vite très grands. ils comporteront autant de mots-nombres partiels que l'orbite comprend d'orbitales et autant de & moins un.

dénombrement. (données d4, d5)

1 – nous savons que les couplages peuvent permuter circulairement sans effet sur l'orbitale. les permutations circulaires des partages fournissent ainsi leur contribution à l'écriture exhaustive de leur mot-nombre. comme il y a 2^{q+1} partages par orbitale, ces partages fournissent donc $a = 2^{q+1}$ permutations circulaires par orbitale;

2 – nous savons aussi qu'il y a $b = 2^{n-q-2}$ orbitales, toutes numériquement identiques. les permutations circulaires a des partages se répètent donc numériquement identiques a x a x…x a, b fois, soit la contribution $a^b = (2^{q+1})^{2n-q-2}$

3 -- enfin, nous savons que les orbitales aussi permutent circulairement dans l'écriture du mot-nombre complet, ce qui fournit $b = 2^{n-q-2}$ permutations circulaires;

4 – au final toutes ces permutations circulaires fournissent le nombre to-tal t de manières d'écrire leur mot-nombre, soit $t = a^b \times b = (2^{q+1})^{2n-q-2} \times 2^{n-q-2}$. surabondance qui n'est pas nécessaire à notre propos.

revenons aux données d1 à d3.

quand q = 0, n = 2 et $(2^{n-q-2})! = 1$ et $2^{q+1} = 2$, [2] = φΣ ou Σφ.

pour q = 1, n = 3 et 4, $2^{n-1} = 4$ et 8.; pour [3[= φα(φid)Σ = φα(φid)Σ = etc.; pour [4] = φα(φφ)Σ&(φid)(αid)(φΣ)α

<u>gödelienne</u>. tout comme les "nombres de gödel" je ne connais pas encore la structure, ni l'usage qu'on en peut faire, de tels mots-nombres qui sont en bijection avec leurs entiers respectifs et sont donc leurs stricts équivalents formels. ces mots-nombres, comme les nombres de gödel, la fonction d'ackerman, etc., n'ont l'air d'exister que comme expressions de protocoles de calculs. sans être eux-mêmes manipulables (aisément) par le calcul. par pure intuition, et plaisir!, je décide d'associer à chaque nombre de gödel, qui est un entier, son mot-nombre ici constitué, et, par transitivité, à l'assertion logique correspondante. on peut imaginer que les nombres de gödel sont des "entiers-programmes" qui se déclineraient avec ape. ces "entiers-programmes", au lieu d'être des atomes symboliques, connaitraient des partitions telles qu'exposées ici; chaque partage représenterait ainsi un "état" de l'assertion logique étudiée, devenant ainsi une "réfraction" de l'assertion logique ou du symbole projetés sur de multiples vecteurs . une assertion logique numérotée par gödel est élémentaire si son nombre de gödel est premier, composée sinon. j'appelle "item" une assertion logique élémentaire ainsi définie. un item n'est donc pas décomposable sauf en termes de partitions des entiers. ainsi "2" s'égalise en [2] et [11] ([un un]), "3" en [3], [12] ([un deux]), [21] ([deux un]) et [111] ([un un un]), etc.

outre cela, certaines propriétés apparaissent, bien "réelles", et qui peuvent être étudiées pour elles-mêmes.

commençons par quelques observations.

a) tous les couplages ne sont pas possibles; en premier lieu id ne peut occuper dans une conjugaison qu'une seule place la dernière, et n'apparaît seul que pour 1, ou comme "résidu" du générateur α.

b) aucun générateur ne se génère lui-même; φ et α se génèrent toujours en alternance, sauf quand Σ s'interpose.

c) Σ précède (génère) toujours φ.

d) Σ ⇠⟶ φ ⟵⟶ α ⇢ id⟲ est un système de production de tous les couplages possibles. par exemple le germe Σφα permet de restituer l'orbitale complète correspondante.

1^m (m ≥ 2)

Σ ↘↙

m

φ ↙↘

1 (m-1) $m - 1 \geq 2 \Rightarrow m \geq 3$

α ↘↙↘

2 (m-2) la suite selon la valeur de m

↙↘ ↓

1 1 x etc.

e) l'interdéfinition de $g_a g^a$ permet de "remonter le temps" $g^a g_a$ puisqu'à partir d'un mode (partage) nous pouvons restituer l'effecteur (conjugaison) précédent, et qu'à partir d'un effecteur (mot-nombre partiel) nous restituons le mode précédent. l'orbitale cyclique est donc constructible dans les deux sens, présent-passé et présent-futur ce qui en fait un objet atemporel. (voir aussi annexe : génération des générateurs).

f) on peut aussi considérer les partages d'un entier comme ses différents "états" ou "représentations" non seulement comme en théorie des au-tomates, mais aussi comme en thermodynamique quantique, voire en théorie des systèmes dynamiques.

le mode (partage générant) et la conjugaison (effecteur générateur) sont consubstantiels : l'un c'est l'autre, comme électricité et magnétisme; ils sont duaux. cette dualité permet de choisir comme germe d'une orbite ω quelconque de l'entier n un partage ou un effecteur quelconque. le nombre entier n est une réalisation dont les modes sont les partages et les conjugaisons les effecteurs. une conjugaison peut même être partielle, elle génèrera tous les partages qui la possèdent en commun. les cellules de production, s'écrivent toutes selon le même schéma de base : mode1/conjugaison/mode2 (partage1/effecteur/partage2).

4 - conjugaisons d'effecteurs.

j'appelle conjugaison la concaténation orientée de gauche à droite, bornée, et donc non circulaire - contrairement aux couplages qui forment un "cylindre" mobile dans les deux sens -, d'effecteurs entre deux partages, le générant et le généré (voir plus haut, couverture d'un entier).

soit le germe (αid)(φΣ)α, dont nous savons qu'il est inclus dans le mot-nombre partiel 4_1.

1 m 1
αid ↘↙↘ ↓
2 (m-1) 1
φΣ ↙↘ ↘↙ donc m-1=1, donc m=2
1 1 2 donc l'orbitale est ^4w
α ↘ ↓ ↙↘
3 1 la suite est connue (voir plus haut)

pour αid, le mode général est, en fait, $1^m n1$, pour simplifier, je ne considère que le cas m = 1. (les variables m, n etc. sont muettes).

formons toutes les conjugaisons à un effecteur : ce sont les quatre modes φ, α, Σ et id. leur diagramme de compatibilités est :

⥁φ → Σ
↓ ↘ ↖ ↑
id ← α⟲

id et Σ sont toujours terminaux; on a donc les huit 2-conjugaisons : αα, αφ, αΣ, αid, φα, 2φ, φΣ et φid, dont le schéma général est :

$$x \in \{\varphi, \alpha\},\ y \in \{id, \Sigma\} \text{ alors xx ou xy.}$$

le diagramme ci-dessus peut aussi être considéré comme la structure de l'alphabet de base F = {α, φ, Σ, id} à partir duquel sont construits tous les effecteurs.

5 - puissance d'une conjugaison.

à chaque effecteur est associé un mode avec une valeur numérique. pour id la valeur est 1. je dis que la puissance p de id est 1. pour φ et Σ la valeur est ≥ 2 puisque φ s'applique au motif m ≥ 2 et Σ fusionne au moins deux 1. je dis que la puissance p de φ et Σ est 2. α est de puissance p = 3 puisqu'il s'applique au motif $1^m n$ dans lequel m ≥ 1 et n ≥ 2, donc le partage (ou portion de partage) est $\min(1^{m\geq 1} + n_{\geq 2}) \geq 3$.

la longueur λ d'une conjugaison est le nombre d'effecteurs élémentaires qui la composent. nous comptons 4 conjugaisons élémentaires de longueur 1. formons maintenant la table des conjugaisons et de leurs puissances et transcrivons, à côté, ces résultats sous forme numérique.

table des conjugaisons, $\lambda = 1$.

p	= 1	2	3	p_{card} =	1	2	3
	id	φ	α		1	2	1
		Σ				2	

il y a 4 effecteurs de longueur 1. il y a un effecteur de puissance 1, id, deux effecteurs de puissance 2, φ et Σ, et un de puissance 3, α.

observons d'emblée que 1 est totalement inclus dans la première colonne, de même 2 est entièrement inclus dans la seconde colonne; 3 se "diffuse" dans les colonnes 1, 2 et 3 afin d'"utiliser" ses 4 effecteurs. poursuivons avec les conjugaisons à 2 effecteurs. il y en a 8.

$\varphi\mathrm{id} \geq 3$ (motif m1), $\varphi\Sigma \geq 4$ (motif $m1^n$), $2\varphi \geq 4$ (motif mn), $\alpha\mathrm{id} \geq 4$ (motif $1^m n1$), $\varphi\alpha \geq 5$ (motif $m1^n p$), , $\alpha\Sigma \geq 5$ (motif $1^m n1^p$), $\alpha\varphi \geq 5$ (motif $1^m np$), et $\alpha\alpha \geq 6$ (motif $1^m n1^p q$). (on connait désormais les conditions sur les entiers qui composent ces motifs).

voici les 12 premières cellules avec l'adjonction de leurs puissances $\mathscr{p}$:

1↺ id $\mathscr{p} = 1$	1^m Σ \ / m $m \geq 2$ $\mathscr{p} = 2$	m φ / \\ 1 m–1 $m \geq 2$ $\mathscr{p} = 2$	1^m n α \ / \\ m+1 n–1 $m \geq 1$, $n \geq 2$ $\mathscr{p} = 3$	m 1 φid / \ | 1 m–1 1 $m \geq 2$ $\mathscr{p} = 3$	m 1^n $\varphi\Sigma$ / \ \ / 1 m–1 n $m, n \geq 2$ $\mathscr{p} = 4$

m n 2φ / \ / \\ 1 m-1 1 n-1 $m, n \geq 2$ $\mathscr{p} = 4$	m 1^n p $\varphi\alpha$ / \ \ / \\ 1m-1 n+1 p-1 $n \geq 1$, $m, p \geq 2$ $\mathscr{p} = 5$	1^mn 1 αid \ / \ | m+1 n-1 1 $m \geq 1$, $n \geq 2$ $\mathscr{p} = 4$	1^m n 1^p $\alpha\Sigma$ \ / \ \ / m+1 n-1 p $m \geq 1$, $n, p \geq 2$ $\mathscr{p} = 5$

1^m n p $\alpha\varphi$
\ / \ / \\
m+1 n-1 1 p-1
$m \geq 1$, $n, p \geq 2$
$\mathscr{p} = 5$

1^m n 1^pq $\alpha\alpha$
\ / \ \ / \\
m+1 n-1 p+1 q-1
$m, p \geq 1$, $n, q \geq 2$
$\mathscr{p} = 6$

complétons notre table $\lambda = 1$, 2, et sa transcription numérique.

p =	1	2	3	4	5	6
	id	φ	α			
		Σ	φid	2φ	φα	2α
				φΣ	αφ	
				αid	αΣ	

p_{card} =	1	2	3	4	5	6
	1	2	1			
			1	3	3	1

en rangeant les conjugaisons selon leurs puissances, nous voyons apparaître le bout du nez d'une curieuse propriété :

"les longueurs des conjugaisons se rangent par puissances en restituant les cœfficients du triangle de pascal, décalés de deux rangs". je nomme pascalines ces suites de cœfficients. soit $\lambda \geq 1$ la longueur d'une conjugaison, alors il y a $\nu_\lambda = 2^{\lambda+1}$ conjugaisons de longueur λ se rangeant par puissances selon les pascalines $C^{\lambda+1}$ (par translation, voir plus haut p22 : IV le triangle de pascal,) des partages de l'entier $\lambda + 2$; nous avons $\nu_\lambda = P_n$, soit $2^{\lambda+1} = 2^{n-1}$ d'où $\lambda = n - 2$.. la loi de répartition de ces pascalines range le premier "1" de la suite des cœfficients en $p = 2\lambda - 1$. considérons les conjugaisons de longueur 3. il y en a 16. nous les rangeons immédiatement selon leur puissance.

p =	5	6	7	8	9
	2φid	3φ	2φα	φ2α	3α
		2φΣ	φαφ	αφα	
		φαid	φαΣ	2αφ	
		αφid	α2φ	2αΣ	
			αφΣ		
			2αid		

p_{card} =	5	6	7	8	9
	1	4	6	4	1

formons la table λ = 1, 2, 3, en compressant les résultats déjà obtenus :

p =	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	id	φ	α	2φ	φα	2α	2φα	φ2α	3α
		Σ	φid	φΣ	αΣ	3φ	φαφ	αφα	
				αid	αφ	2φΣ	φαΣ	2αφ	
					2φid	αφid	α2φ	2αΣ	
						φαid	αφΣ		
							2αid		
	1	2	1						
			1	3	3	1			
					1	4	6	4	1
Σ =	1	2	2	3	4	5	changent avec λ		

la prochaine conjugaison de longueur 4 de moindre puissance, c'est-à-dire φφφid = 3φid, se placera en puissance 7. on peut déjà écrire :

p =	7	8	9	10	11	12	
	1	5	10	10	5	1	de 3φid (p = 7) à 4α (p = 12).

à ce stade, nous pouvons écrire le polynôme général de toutes les concaténations de conjugaisons possibles, φ et α sont commutables, id et Σ toujours terminaux et jamais conjoints (le signe '⊎' représente la concaténation commutative, et "⊎" la concaténation non commutative) :

$$\{a\varphi \uplus b\alpha\} \uplus c_i\{\Sigma;\, id\}$$

avec a, b ∈ N et $c_0 = (0, 0)$, $c_1 = (0, 1)$ et $c_2 = (1, 0)$.
ce qu'on peut écrire en termes de puissances : $\{a2 \uplus b3\} \uplus c_i\{2, 1\}$.
par ex. pour a = 3, b = 2 avec $c_2 = (1, 0)$ nous obtenons 3φ2αΣ ou 2α3φΣ de puissance p = 14 et avec $c_1 = (0, 1)$ nous obtenons 3φ2αid ou 2α3φid de puissance p = 13, etc.
les cœfficients a, b et c, nuls ou non donnent la quantité d'effecteurs entrant dans la composition de la conjugaison. l'ensemble des conjugaisons de même longueur λ ≥ 1 forme une classe de conjugaison, que je note $\mathcal{C}_\lambda$, contenant k conjugaisons, k = card($\mathcal{C}_\lambda$) = $2^{\lambda+1}$. ces conjugaisons peuvent se répartir sur plusieurs puissances (voir plus bas, les échelles de conjugaisons éch($\mathcal{C}_\lambda$)). réciproquement, chaque entier n utilise au moins toutes les combinaisons de sa puissance (la colonne n de la table). comme son nombre de conjugaisons utilisées est son nombre de partages p_n, il est manifeste que sa colonne enregistre un déficit par rapport à ce nombre.
appelons pad(p) le montant total de la colonne p (= n). alors le déficit $d_p(n) = pad(p)/p_n = pad(p)/2^{n-1} < 1$; hormis 1 et 2.

<u>tableau des déficits $d_p(n) = pad(p)/2^{n-1}$.</u>

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
pad(n)	1	2	2	3	4	5	7	9	12	16	21	28
2^{n-1}	1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048
$d_p(n)$	1	1	½	3/8	¼	5/32	7/64	9/128	3/64	1/32	21/1024	7/512

ce déficit rapide est, en quelque sorte, une mesure de raréfaction.
la conjugaison minimale d'une classe est, en termes symboliques :

$$\min(C_\lambda) = ((\lambda - 1)\varphi)\mathrm{id}.$$

si $\lambda = 1$ la conjugaison se réduit au mode/effecteur id, et la maximale est $\max(C_\lambda) = \lambda\alpha$. soit, en termes de puissances (le signe "⇛".signifie : la forme symbolique à gauche équivaut à la valeur numérique à droite) :

$\min(\mathcal{C}_\lambda) = ((\lambda - 1)2)1 \Rrightarrow 2(\lambda - 1) + 1 = 2\lambda - 1$, et $\max(\mathcal{C}_\lambda) = \lambda 3 \Rrightarrow 3\lambda$.

on a : $\max(\mathcal{C}_\lambda) - \min(\mathcal{C}_\lambda) = \lambda 3 - ((\lambda - 1)2)1 \Rrightarrow 3\lambda - (2\lambda - 1) = \lambda + 1$; leur rapport $3\lambda/(2\lambda - 1)$ tend vers 3/2 quand λ tend vers l'∞.

connaissant min et max de $\mathcal{C}_\lambda$, nous pouvons construire l'échelle λ des conjugaisons, $k = \mathrm{card}(\mathcal{C}_\lambda)$.

$\lambda = 1$, $k = 4$, $\min(\mathcal{C}_1) = \mathrm{id} = 1$ et $\max(\mathcal{C}_1) = \alpha = 3$, éch($\mathcal{C}_1$) = [123]
$\lambda = 2$, $k = 8$, $\min(\mathcal{C}_2) = \varphi\mathrm{id} = 3$ et $\max(\mathcal{C}_2) = 2\alpha = 6$, éch($\mathcal{C}_2$) = [3456]
$\lambda = 3$, $k = 16$, $\min(\mathcal{C}_3) = 2\varphi\mathrm{id} = 5$ et $\max(\mathcal{C}_3) = 3\alpha = 9$, éch($\mathcal{C}_3$) = [56789]
$\lambda = 4$, $k = 32$, $\min(\mathcal{C}_4) = 3\varphi\mathrm{id} = 7$ et $\max(\mathcal{C}_4) = 4\alpha = 12$, éch($\mathcal{C}_4$) = [789101112]
$\lambda = 5$, $k = 64$, $\min(\mathcal{C}_5) = 4\varphi\mathrm{id} = 9$ et $\max(\mathcal{C}_5) = 5\alpha = 15$, éch($\mathcal{C}_5$) = [9101112131415] etc.

$\min(\mathcal{C}_\lambda)$ produit tous les nombres impairs $2\lambda - 1$, $\max(\mathcal{C}_\lambda) = 3\alpha$ tous les multiples de 3. chaque éch($\mathcal{C}_\lambda$) donne un ensemble d'entiers produits à partir de λ, il y en a $\lambda + 2$, avec card(éch($\mathcal{C}_{\lambda+1}$)) = card(éch($\mathcal{C}_\lambda$)) + 1. comme $\lambda + 2 < k = 2^{\lambda+1}$ cela signifie qu'un même entier utilise plusieurs conjugaisons de longueur λ, et donc l'échelle des conjugaisons compressée indique que les conjugaisons utilisées par l'entier n ne se trouvent pas dans la colonne n + 1 et au-delà, mais utilisent les colonnes de puissances inférieures, par exemple, comme nous l'avons vu précédemment, 1 n'utilise que la colonne id, 2 n'utilise que la colonne $\{\varphi; \Sigma\}$, 3 utilise deux colonnes $\{\alpha; \varphi\mathrm{id}\}$ et $\{\varphi; \Sigma\}$, etc. autrement dit chaque conjugaison permet de restituer l'entier minimum de la série d'entiers à laquelle elle participe, c'est ce qu'indique sa puissance p qui n'est autre que cet entier minimum, comme nous l'avons déjà vu. de fait, chaque conjugaison apparaîtra dans tous les entiers $\geq$ p.

chaque premier élément d'une éch($\mathcal{C}_\lambda$) s'ajoute au 3e élément de l'éch($\mathcal{C}_{\lambda-1}$), les éléments de éch($\mathcal{C}_\lambda$) sont décalés de $\lambda - 1$ par rapport à ceux de éch($\mathcal{C}_{\lambda-1}$). d'autre part tout entier n, sauf 1 et 2, participe de plusieurs échelles; je nomme étage de n, je note ét(n), un tel groupement. par exemple 13 est dans l'échelle de $13 = 2\lambda - 1$, soit $\lambda = 7$, mais il habite l'étage qui va de $3\lambda = 12$ (maximum de l'échelle juste en-dessous), soit $\lambda = 4$, à $2\lambda - 1 = 15$ (minimum de l'échelle juste en-dessus), soit $\lambda = 8$. donc ét(13) = {5; 6; 7} et card[ét(13)] = 3.

ceci nous permet donc de compléter la table compressée des conjugaisons et de calculer la valeur totale de chaque colonne de puissance. en voici les premiers éléments :

1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 etc.

---

1 2 2 3 4 5 7 9 12 16 21 28 37 49 65 86 114 151 changent avec λ.

cette séquence n'est autre que la suite de padovan (A000931, encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers points de vue différents) dont on tire le second nombre morphique, avec le nombre d'or, dit nombre ou constante plastique p_n/p_{n-1}. sa suite cumulative est 1 3 5 8 12 17 24 33 45 61 82 110 147 196 261 347 461 612 …je renomme cette suite de padovan la série pascaline pasc. vue du côté "puissance", pasc correspond à la puissan-ce fournie p_f aux entiers n. elle est donc définie, ici, comme la somme, décalée de deux rangs, des pascalines. en segmentant pasc de quelcon-que manière, on obtient des segments bornés à droite par l'entier n, ma-ximum qui utilise la totalité des effecteurs de puissance $2 \le p \le n$.

6 - répartition des effecteurs par entier.

voici le tableau des effecteurs utilisés par n, de 1 à 6, rangés par puissances. je nomme puissance utile $p_u(n)$ ces ensembles d'effecteurs.

p	1	2	3	4	5	6
n = 1	id					
n = 2		φ Σ				
n = 3		φ Σ	φid α			
n = 4		φ Σ	φid α α	φΣ 2φ αid		
n = 5		φ Σ	φid α α α	φΣ φΣ 2φ 2φ αid αid	2φid φα αΣ αφ	
n = 6		φ Σ	φid (α)x4	(φΣ)x3 (2φ)x3 (αid)x3	(2φid)x2 (φα)x3 (αΣ)x3 (αφ)x3	(2φΣ) 3φ φαid αφid 2α

retranscrivons ces résultats en cœfficients "pascaliens" C^n_p où n représente la ligne n du tableau et p la puissance des effecteurs contributifs.

C^n_p, puissance utile $p_u(n)$, donne le nombre d'effecteurs de puissances p qu'utilise n, puissances qui ne sont jamais supérieures à l'entier auquel elles participent. la somme d'une ligne est toujours égale à 2^{n-1}. je nom-me pascalienne de n, p_n, cette suite.

puissance	1	2	3	4	5	6
1	1					
2		2				
3		2	2			
4		2	3	3		

5	2	4	6	4	
6	2	5	9	11	5

jusqu'à n = 5, on reconnaît les cœfficients de pascal légèrement modifiés, ou pseudo-pascales, mais à partir de n = 6 apparaît une perturbation combinatoire, en rouge, que je considère plus loin. je nomme pascalienne de n cette suite des cœfficients réels associés à l'entier n.

1°) 2ème colonne : tous les entiers > 1 ont en effet les deux premiers effecteurs φ et Σ en commun, $C^{n}_{2} = 2$, aussi ∀n, $C^{n}_{3} = n - 1$, etc.

2°) les deux '1' extrêmes s'additionnent pour donner la pseudo-pascale, le dernier '1' du triangle de pascal disparaît, en relation d'une part avec les deux premiers effecteurs qui sont associés l'un à l'autre et donc la somme des cœfficients redonne le nombre des partages de n, 2^{n-1}; d'autre part avec la contrainte qui empêche un effecteur de n de dépasser le maximum de la puissance nominale de cet entier.

3°) perturbations pascaliennes. de n = 1 à 3, les effecteurs fournis correspondent exactement aux "besoins" des entiers, mais à partir de l'entier 4, pour tout n ≥ 4 pour toute p ≥ 2 certains effecteurs seront utilisés plusieurs fois. de n = 1 à 3, pascaline, pseudo-pascale et pascalienne sont égales. pour n = 4 et 5, pascalienne et pseudo-pascale sont encore égales; c'est à partir de n = 6 que ces suites divergent.

nous allons considérer simultanément quatre sortes d'informations qui sont étroitement intriquées:

a) la puissance fournie p_f, donnée des effecteurs par puissance; nous avons vu qu'elle correspond à la série pascaline ou suite de padovan (dont nous excluons 1 car jamais utilisé seul).

b) la puissance utile p_u, ou pascalienne, ou encore puissance réelle, ensemble des effecteurs effectivement utilisés par n;

c) la pseudo-pascale qu'on peut aussi considérer comme une pascalienne "idéale" par rapport à laquelle la pascalienne peut théoriquement se comparer; pour cela je nomme puissance virtuelle p_v cette suite;

d) l'écart $d_n = p_u - p_f$, toujours ≥ 0 et > 0 dès n ≥ 4, qui nous informe du nombre d'effecteurs manquants pour n ≥ 4, et de quelles puissances, mais sans faire connaître précisément lesquels. le rapport

$r_n = p_f/p_u$, qui a pour asymptote infinie 0, mesure, la raréfaction du nombre d'effecteurs de base pour construire les orbites des entiers, son inverse r'_n, l'expansion rapide des orbites.

d') l'écart $\delta_n = p_u - p_v$, dont je n'ai, pour l'instant, pas l'usage et qui mesurerait (?) la puissance fournie par rapport à une "norme" que serait la pseudo-pascale, elle-même avatar de la pascaline. en tout cas on observe que cet écart est moins grand que d_n. il est d'ailleurs permis d'envisager l'écart entre ces deux écarts, $\delta_n - d_n = (p_u - p_v) - (p_u - p_f) = p_f - p_v$ écart négatif lui, entre la structure particulière du langage des effecteurs et la structure arithmo-algébrqe du triangle de pascal.

alors qu'il est relativement simple de construire à la main tous les effecteurs d'une puissance donnée, puisque l'attribution d'une puissance aux effecteurs (voir plus haut : puissance des conjugaisons) les instaurent en tant que mots valués, il est plus difficile de connaître quels effecteurs manquent. à priori, nous n'avons aucun moyen de connaître exactement, c'est-à-dire de prédire, les effecteurs manquants. nous nous voyons donc obligés d'utiliser une heuristique, mettant aussi en œuvre les ressources combinatoires traditionnelles.

construisons, pour les entiers de 2 à 9, le tableau des écarts d_n de la manière suivante : 1ère ligne la pascalienne p_n équivalent à la puissance utile p_u, 2ème ligne la puissance fournie p_f et 3ème ligne la valeur de l'écart $d_n = p_u - p_f$. le tableau commence à p = 2.

2	p_{u2}	2	= 2	
	p_{f2}	2		$r_2 = 1$
	d_2	0 .		
3	p_{u3}	2 2	= 4	
	p_{f3}	2 2		$r_3 = 1$
	d_3	0 0 .		
4	p_{u4}	2 3 3	= 8	
	p_{f4}	2 2 3	= 7	$r_4 = 7/8 = 0{,}875$
	d_4	0 1 0 .		il manque 1 effecteur de puissance 3, α ou φid
5	p_{u5}	2 4 6 4	= 16	
	p_{f5}	2 2 3 4	= 11	$r_5 = 11/16 = 0{,}6875$
	d_5	0 2 3 0 .		il manque 2 effecteurs de puissance 3 et 3 de puissance 4
6	p_{u6}	2 5 9 11 5	= 32	
	p_{f6}	2 2 3 4 5	= 16	$r_6 = ½ = 0{,}5$
	d_6	0 3 6 7 0		3 p=3, 6 p=4, 7 p=5.
7	p_{u7}	2 6 12 21 16 7	= 64	

	p_{f7}	2	2	3	4	5	7			= 23	r_7 = 23/64 = 0,359375
	d_7	0	4	9	17	11	0				4 p=3, 9 p=4, 17 p=5, 11 p=6
8	p_{u8}	2	7	15	34	34	27	9		= 128	
	p_{f8}	2	2	3	4	5	7	9		= 32	r_8 = ¼ = 0,25
	d_8	0	5	12	30	29	20	0			5 p=3, 12 p=4, 30 p=5, 29 p=6, 20 p=7
9	p_{u9}	2	8	18	45	50	62	59	12	= 256	
	p_{f9}	2	2	3	4	5	7	9	12	= 44	r_9 = 11/64 = 0,171875
	d_9	0	6	15	41	45	55	50	0		6 p=3, 15 p=4, 41 p=5, 45 p=6, 55 p=7, 50 p=8

observations : certaines régularités apparaissent clairement,

1- évidemment la colonne de puissance 2 est identique pour tous les n;

2- la colonne de puissance 3 = n – 1, d_n suit cette régularité;

3- la colonne p = 4 est de raison arithmétique 3, d_n suit cette régularité;

4- pour tout n sa dernière colonne a son compte d'effecteurs.

ces observations nous permettent d'économiser l'écriture pour ces colonnes. nous n'aurons donc qu'à étudier, pour tout n, les colonnes 5 à n – 1.

comme nous l'avons observé, une première perturbation apparue à 4, concerne le nombre d'effecteurs fournis/consommés; cependant, jusqu'à 5, le nombre d'effecteurs ajoutés (consommés – fournis), respecte la pseudo-pascale. à partir de 6 une seconde perturbation apparaît, la pascalienne de n diverge d'avec la pseudo-pascale, le nombre d'effecteurs diffère de celui attendu (?). il faudra donc reconstituer à la main les effecteurs manquants. travail rapidement pénible que je réserve pour l'annexe : reconstitution des effecteurs et partages afférents.

annexe 1 : orbites (page 35)

l'orbite de l'entier 5 nous servira d'exercice d'apprentissage.
l'entier 5 contient 2^4 = 16 partages (voir d3, page 3) répartis sur 2 orbitales (voir d4 page 36), soit 8 partages par orbitale (voir d5 page 36).

```
                 5*      ←--                       --→     3     2  ←--------
φ              /   \                       2φ           / \   /  \
              1      4←----                                1  2  1   1←
α              \    / \                    αΣ           \  / \  \  /
                2     3 ←- -   --   --------                2   1  2*
2φ             / \   /  \                  φα           / \   \  / \
              1  11    2 ←      -   -----                1   1   2   1←
α              \  ||  /   \                αid          \  |  /  \   |
```

```
            4       1←┘      |      |            3    1  1←- ┐      |
 φid       /  \     |        |      |   φΣ      / \     \ /    |      |
          1    3    1*       |   ┌--| -- ---→   1    2    2    |      |
 αid       \  / \   |        |   |  |   αφ      \  / \  / \    |      |
            2    2  1←----   | --┘  └-----→      2  1  1  1    |      |
 2φid      / \  / \ |        |           φΣ     / \   \ | /    |      |
          1   11   11*→--┘  Σ                  1  1     3 ←  - ┘  →-┘ α
```

$^5w_0$ $^5w_1$

l'orbite de 5 comporte 4 partages palindromes (les *) [5], [131], [1^5] et [212]. les 12 autres partages se répartissent en 6 paires de partages symétriques dont 3 paires, 1 plus 2, occupent la même orbitale [14 ⥯ 41]∈ $^5w_0$ et {[1211 ⥯ 1121], [311 ⥯ 113]} ∈ $^5w_1$. les 3 autres paires couplant les deux orbitales [23 ⥯ 32], [1112 ⥯ 2111] et [221 ⥯ 122]. (entre ( ) les conjugaisons; le cas 2φid est sans ambigüité puisque id ne peut être accompagné à droite; donc inutile d'écrire ((2φ)id) l'écriture φidφid étant impossible). le mot-nombre 5 est

φα(2φ)α(φid)(αid)(2φid)Σ&(2φ)(αΣ)(φα)(αid)(φΣ)(αφ)(φΣ)α

composons maintenant la table compressée des conjugaisons de 5 (voir aussi répartition des effecteurs, p. 45) avec à côté sa pascalienne, qui est, je le rappelle, la puissance utile p_u de n.

p =	2	3	4	5
	φ	α	2φ	2φid
	Σ	α	φΣ	αΣ
		φid	αid	φα
		α	2φ	αφ
			φΣ	
			αid	
	4	12	24	20

p_{card} =	2	3	4	5
	2	4	6	4

(en rouge les effecteurs utilisés par 4)

$p_{totale} = 60$

comme 5 comprend 16 partages, tous de même valeur, je nomme expansion ex(5) la valeur 5 x 16 = 80. plus généralement, l'expansion d'un entier n est donnée par : ex(n) = n x 2^{n-1} (oeis A001787).

le rapport m = p_u(n)/ex(n), ici 60/80 = ¾ manifeste le "vide" numérique du nombre, sa "contraction". je nomme ce rapport la masse "au repos" $^n m_0$ de l'entier n. je vois là une passerelle vers les nombres surréels.

nous avions obtenu les orbitales des nombres 1, 2, 3 et 4 dont j'expose les masses "au repos" avec celles de 5 et 6 :

1 : $p_{tot}(1) = ex(1) = 1$, donc $m_1 = 1$
2 : $p_{tot}(2) = ex(2) = 4$, donc $m_2 = 1$
3 : $p_{tot}(3) = 10$, $ex(3) = 12$, donc $m_3 = 5/6 = 0{,}83^{....}$
4 : $p_{tot}(4) = 25$, $ex(4) = 32$, donc $m_4 = 25/32 = 0{,}78125$
5 : $p_{tot}(5) = 60$, $ex(5) = 80$, donc $m_5 = 0{,}75$.
6 : ptot(6) = 141, ex(6) = 192, donc $m_6 = 0{,}734375$.

à cette étape, on se rend bien compte que les entiers offrent une multiplicité opérationnelle plus riche que l'arithmétique traditionnelle. on peut en effet additionner leurs expansions par exemple, leurs puissances et leurs masses, notamment. la somme des expansions de terme général $n2^{n-1}$, est :

$$\Sigma ex(n_k) = n_1 2^{n_1 -1} + n_2 2^{n_2 -1} + \ldots + n_k 2^{n_k -1} = \Sigma n_k 2^{n_k -1}.$$

la suite des 10 premiers termes est 1 4 12 32 80 192 448 1024 2304 5120 (A001787, oeis) et la somme cumulée est 1 5 17 49 129 321 769 1793 4097 9217. la somme des puissances s'effectue à partir de l'attribution des cœfficients de pascal aux conjugaisons de l'expansion du nombre comme montrée plus haut avec la même structure additive que les expansions. en ce qui concerne la somme des masses, je considère deux sortes de sommes :

1- l'addition arithmétique des masses :

$$\Sigma m_i = m_1 + m_2 + \ldots + m_i = \Sigma[p_u(n_i)/ex(n_i)].$$

2- la somme "contractée" des masses, sommes des puissances des entiers divisée par la somme de leurs expansions :

$$\Sigma m^i = [\Sigma p_u(n_i)]/\Sigma ex(n_i).$$

voici un tableau comparé des deux différentes sommes des 6 premiers entiers, qui montre bien l'effet de la "contraction".

m_i	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**m^i**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
1	2	2	1,83¨	1,78	1,75	1,73		1	1	0,84	0,78	0,75	0,73
2		2	1,83¨	1,78	1,75	1,73			1	0,87	0,80	0,76	0,74
3			1,66¨	1,61	1,58	1,57				0,83¨	0,79	0,97	0,74
4				1,56	1,53	1,52					0,78	0,75	0,74
5					1,5	1,48						0,75	0,73
6						1,46							0,73

annexe 2 : du mot-nombre au nombre (page 49)

nous avons déjà vu les mots-nombres des entiers 1, 2, 3 et 4 et leur reconstitution à partir de ces mots-nombres.
nous allons pratiquer le même exercice sur l'entier 5.
pour commencer cet exercice nous prenons le mot-nombre 5 par n'importe quelle conjugaison de n'importe quel mot partiel (voir dénombrement, p. 49). pour économiser l'effort, faisons de suite $m \geq 2$.
prenons pour germe le mot partiel (2φ)(αΣ)(φα)(αid)(φΣ)(αφ)(φΣ)α.
et lançons la machine avec la conjugaison αid, ce qui revient à écrire le mot partiel ainsi : (αid)(φΣ)(αφ)(φΣ)α(2φ)(αΣ)(φα).
nous plaçons donc en premier le mode (abstrait) qui correspond à la conjugaison choisie. et nous savons que l'orbitale comprend 8 partages, c'est-à-dire 8 effecteurs.

```
                     1^m   n    1        mode pour αid.
     αid              \   / \   |
                      m+1 n-1  1
     φΣ               / \    \  /         Σ → n = 2
                     1   m    2
     αφ               \ / \   /\
                      2  m-11  1
     φΣ              / \   \ | /          Σ → m = 2
                    1   1    3
      α              \   |   / \
                         3    2
     2φ                 /  \  /\
                       1   2  1  1
     αΣ                \  / \  \/
                         2   1  2
     φα                 /\   \ /\
                       1  1   2   1      mode initial 1121 = 1^2 21
     αid  etc.          \ |   / \  |      etc.
```

<u>annexe 3 : "hard symbolism"</u>

la logique interne des processus liés aux partitions, leur univocité, nous offre un ensemble de signes qui suffisent à écrire ces processus. ces signes ce sont les 3 flèches de l'algorithme ape : F = {↘, ↙, ↓}

question : peut-on remplacer sans aucune ambigüité toutes les conjugaisons, compositions de φ, α, Σ et id, par ces trois flèches?
réponse :, α ≈ {↘↙↘}, φ ≈ {↙↘}, Σ ≈ {↘↙} et id ≈ {↓}.

exemple 1: ↘↙↘↙↘↓.

analyse.

(↘↙)(↘↙↘)↓? ≈ Σαid impossible; il n'y a qu'une lecture possible, en (↘↙↘)(↙↘)↓ ≈ αφid de puissance 6, soit la configuration $1^m np1 \geq 5$ avec $m \geq 1$ et $n, p \geq 2$.

exemple 2 : ↘↙↙↘↘↘↙↘↙↘

à réécrire : ↘↙↙↘↘↙↘↙↘, car il ne peut y avoir 3 flèches consécutives identiques ↘↘↘. deux flèches identiques consécutives, ↙↙ et ↘↘, indiquent les changements d'effecteurs. on peut lire ΣφΣα ou Σφαφ.

analyse.

1- (↘↙)(↙↘)(↘↙)(↘↙↘) = ΣφΣα est impossible car deux Σ non terminaux.

2- (↘↙)(↙↘)(↘↙↘)(↙↘) ≈ Σφαφ est impossible car Σ mal placé. on peut corriger :

a) soit en supprimant l'effecteur mal placé et on obtient (↙↘)(↘↙↘)(↙↘) ≈ φαφ, conjugaison de puissance 7 et de motif $m1^n pq$ avec $n \geq 1$ et m, p et $q \geq 2$;

b) soit en transformant Σ en α en ajoutant une flèche ↘ en 3ème position ce qui donne (↘↙↘)(↙↘)(↘↙↘)(↙↘) ≈ αφαφ de puissance 10, comme le montre le nombre de flèches utilisées. le motif en est : $1^m np1^q rs$ avec m et $q \geq 1$ et n, p, r et $s \geq 2$.

il y a bien sûr d'autres manières de corriger un code défectueux.

nous avons vu plus haut en I-B-3 page 38 "inspirations", que l'effecteur α pouvait être considéré comme une intrication (₪) virtuelle. celle de Σ et de φ, ce que j'écrivais $\omega = <\Sigma_k ₪^\varepsilon \varphi^\varepsilon> = <↘↙_k\ ₪^\varepsilon\ ↙↘^\varepsilon>$: avec, si $\varepsilon = 1$ alors $k \geq 1$, et $\omega = <\Sigma_{\geq 1} ₪ \varphi> = <↘↙↘> = \alpha$; comme à chaque opérateur il lui correspond une puissance, on peut remarquer que celle-ci est égale, nominalement, au nombre de flèches qu'il contient, 1 pour id, 2 pour φ et Σ et 3 pour α. ainsi tout se passe comme si chaque flèche était dotée d'un poids 1. ainsi, chaque partage, auquel est associé son double, l'effecteur qui le représente et s'applique à lui pour générer le partage suivant dans l'orbitale, est assorti d'un nombre de flèches invariable et unique, qui, par son poids, somme correspondant à la concaténation des flèches, supporte la puissance de l'effecteur. poids et puissance sont identiques numériquement, c'est-à-dire identiques au nombre de flèches imparti à l'effecteur.

la puissance utile p_u d'un entier est donc directement lisible sur son mot-nombre.

fondements.

nous disposons d'un alphabet de 3 flèches F = {↙, ↘, ↓} avec des règles de compositions simples. ces flèches produisent les 4 mots φ, α, Σ et id, les générateurs de notre algorithme. les combinaisons de ces mots forment des phrases, les conjugaisons. et ces phrases produisent un texte, les générants-générés des orbitales dont l'ensemble, l'orbite, constitue le discours de l'entier n, sa partition, c'est-à-dire son expansion.

les règles de compositions de F = {↙, ↘, ↓}.

- ↓ toujours seule, toujours à la borne droite du mot, "mo↓"
- ↙ toujours une seule fois par mot "↙↘", "↘↙↘" et "↘↙".
- ↘↙ toujours seul, toujours à la borne droite d'une phrase, "phra↘↙".
- les deux mots "↘↙" et "↙↘" sont "commutés" l'un de l'autre. "↙" lie leur intrication en le mot "↘↙↘" ≈ ↘↙ ₪ ↙↘ (voir considérations, p. 6).

annexe 4 : criptografie.

1- alice et bob choisissent un entier n, par ex 12, qu'elle et lui sont seul·e·s à connaître. elle et lui conviennent aussi de s'envoyer les informations dans un certain ordre : d'abord z, puis x, puis t, puis y. de plus, alice et bob conviennent d'un nombre k de générations pour atteindre le partage de 12 désiré, mettons k = 5.

2- alice envoie à bob la conjugaison αφΣ de puissance 7. l'espion capte ce mot. il connaît la procédure et écrit, en même temps que bob, le gé-nérant abstrait correspondant : $[1^a bc1^d]$. il ne connaît évidemment pas les valeurs de x, y, z et t (la méconnaissance de leurs emplacements dans le motif générant n'intervient pas dans le calcul, ce qui ne l'oblige pas à considérer les 24 permutations de l'ensemble {a, b, c, d}).

il sait seulement que tous ces nombres sont ≥ 2. et que l'entier n ≥ 8. il sait aussi qu'il obtiendra le généré [(a+1)(b-1)1(c-1)d] avec a + 1 ≥ 3, b – 1 et c – 1 ≥ 1, et d ≥ 2, soit (a + 1) + (b – 1) + 1 + (c- 1) + d ≥ 8.

3- bob renvoie à alice la valeur de z, z = 3, par exemple.

l'espion capte cette valeur; il se trouve donc devant 4 choix pour lesquels il calcule les générés :

$[1^3bc1^d]$ fournit [4(b-1)1(c-1)d]
$[1^a3c1^d]$ " [(a+1)21(c-1)d]
$[1^ab31^d]$ " [(a+1)(b-1)12d]
$[1^abc1^3]$ " [(a+1)(b-1)1(c-1)3].

4- bob dispose donc du mode provisoire $[1^xy31^t]$. il retourne à alice la 2-ième valeur convenue, x = 4.

l'espion capte l'information en même temps qu'alice, mais le nombre de ses choix augmente c'est-à-dire multiplier par 3 chacune des 4 possibilités précédentes, soient :

$[1^34c1^d]$ fournit [431(c-1)d]
$[1^3b41^d]$ " [4(b-1)13d]
$[1^3bc1^4]$ " [4(b-1)1(c-1)4]
$[1^43c1^d]$ " [521(c-1)d]
$[1^a341^d]$ " [(a+1)213d]
$[1^a3c1^4]$ " [(a+1)21(c-1)4]
$[1^4b31^d]$ " [5(b-1)12d]
$[1^a431^d]$ " [(a+1)312d]
$[1^ab31^4]$ " [(a+1)(b-1)124]

$[1^4bc1^3]$ " [5(b-1)1(c-1)3]
$[1^a4c1^3]$ " [(a+1)31(c-1)3]

$[1^a b 4 1^3]$ " $[(a+1)(b-1)133]$.

5- alice retourne alors à bob la valeur t = 3 que l'espion capte en même temps que bob qui dispose de l'unique générant $[1^4 y 3 1^3]$, quand l'espion a 24 choix

$[1^3 4 3 1^d]$ fournit $[4312d]$
$[1^3 4 c 1^3]$ " $[431(c-1)3]$

$[1^3 3 4 1^d]$ " $[4213d]$
$[1^3 b 4 1^3]$ " $[4(b-1)133]$

$[1^3 3 c 1^4]$ " $[421(c-1)4]$
$[1^3 b 3 1^4]$ " $[4(b-1)124]$
$[1^4 3 3 1^d]$ " $[5212d]$
$[1^4 3 c 1^d]$ " $[521(c-1)3]$

$[1^a 3 4 1^d]$ " $[(a+1)213d]$
$[1^a 3 4 1^d]$ " $[(a+1)213d]$

$[1^3 3 c 1^4]$ " $[421(c-1)4]$
$[1^a 3 3 1^4]$ " $[(a+1)2124]$

$[1^4 3 3 1^d]$ " $[5212d]$
$[1^4 b 3 1^3]$ " $[5(b-1)123]$

$[1^3 4 3 1^d]$ " $[4312d]$
$[1^a 4 3 1^3]$ " $[(a+1)3123]$
$[1^3 b 3 1^4]$ " $[4(b-1)124]$
$[1^a 3 3 1^3]$ " $[(a+1)2124]$

$[1^4 3 c 1^3]$ " $[521(c-1)3]$
$[1^4 b 3 1^3]$ " $[5(b-1)123]$

$[1^3 4 c 1^3]$ " $[431(c-1)3]$
$[1^a 4 3 1^3]$ " $[(a+1)3123]$

$[1^3 b 4 1^3]$ " $[4(b-1)133]$.
$[1^a 3 4 1^3]$ " $[(a+1)2133]$.

6- bob envoie la dernière valeur y = 2 à alice qui forme le partage $[1^4 2 3 1^3]$. l'espion se trouve, lui, devant les 24 possibilités qu'il n'a plus qu'à compléter. comme convenu alice envoie à bob le nombre k = 5 de générations après [1^4231^3] ce qu'effectue bob (ou sa machine à générer), et l'espion doit donc générer les 24 fois 5 générations soient 120 opérations. en temps machine c'est peu de choses mais c'est quand même 120 fois plus lent qu'une seule opération.

la machine de bob effectue donc :

1^4231^3	initialisation
51123	pas 1
143112	pas 2
231231	pas 3
111221121	pas 4
4111311	pas 5

dès que bob effectue la transaction, celle-ci s'autodétruit sur le champ et bob et alice choisiront un nouvel entier, une nouvelle combinaison et un nouvel ordre d'envoi des informations ainsi qu'un nouveau nombre de générations à effectuer.

annexe 5 : générations des générateurs

I – dictionnaire des générations

les générateurs génèrent les générants qui les engendrent.

on a vu que les orbitales étaient atemporelles et que les motifs générants (modes) déterminaient leurs effecteurs. on a vu aussi que les effecteurs (générateurs) reconstituaient les générants sur lesquels ils s'appliquaient, produisant ainsi les motifs générés.

générants et générés sont les partages de l'entier n, ils sont cet entier sous une forme intriquée, celle des sommants $s_{n,k}$ de n. ces sommants sont des entiers toujours "plus petits" que n, $s_{n,k} \leq n$.

tous les éléments ici étudiés, partages (générants-générés), conjugaisons (effecteurs, générateurs) et mots-nombres, sont des états de "mémoire" de l'entier. à partir de n'importe lequel de ces états toute la partition de l'entier peut être reconstituée et toutes les relations arithmétiques dans lesquelles intervient cet entier.

mais, si les partages sont des assortiments orientés et organisés de nom-bres, il en va autrement des générateurs qui sont des objets d'une au-tre espèce, les mots-nombres. les couplages de leurs conjugaisons produisent les orbitales des entiers dont ils sont les mot-nombres et leur structure est plus symbolique que numérique. ils forment une autre arithmétique, "duale" de celle des entiers et de prime abord plus complexe.

puisqu'à chaque générateur correspond, en amont, un et un seul motif générant, motif généré par le générateur précédent, il lui correspond aussi, en aval, un et un seul motif généré; motif générant pour le générateur suivant, ce qui permet de considérer la suite des effecteurs se générant les uns les autres.

mais comme cette suite est très vite arborescente dans toutes les directions et forme un graphe vite encombré, c'est la liste "lexicographi-que" que je présente ici, des effecteurs de longueur $\lambda = 1$ et 2 seulement, mais complète pour ces deux longueurs.

l'ordre lexicographique adopté suit les puissances : id et Σ pour les deux premiers effecteurs puis φ et α suivis de leurs composés dans l'ordre φX et αY.

annexe 6 : <u>dictionnaire des générations des générateurs.</u>

$\lambda = 1$	$\lambda = 2$		
$\mathrm{id} \to \mathrm{id}$	$\varphi\mathrm{id} \to \Sigma$	$\alpha\varphi \to \varphi\Sigma$	$2\alpha \to \varphi\alpha\mathrm{id}$
$\Sigma \to \varphi$	$\to \alpha\mathrm{id}$	$\to \varphi\alpha$	$\to \varphi\alpha\varphi$
$\varphi \to \Sigma$	$\varphi\Sigma \to \alpha$	$\to 2\varphi\Sigma$	$\to 3\varphi\mathrm{id}$
$\to \alpha$	$\to \alpha\varphi$	$\to 2\varphi\alpha$	$\to 4\varphi$
$\alpha \to \varphi\mathrm{id}$	$2\varphi \to \Sigma$	$\varphi\alpha \to \alpha\mathrm{id}$	$\alpha\mathrm{id} \to \varphi\Sigma$
$\to 2\varphi$	$\to \alpha$	$\to \alpha\varphi$	$\to 2\varphi\mathrm{id}$
	$\to \alpha\Sigma$	$\to \alpha\varphi\mathrm{id}$	$\alpha\Sigma \to \varphi\alpha$
	$\to 2\alpha$	$\to \alpha 2\varphi$	$\to 3\varphi$

il est ainsi loisible de reconstituer le graphe de générations des générateurs et en tirer quelques observations.

– <u>composition des mots-nombres à partir de leur répartition et du dictionnaire</u>.

il est utile de savoir composer le mot-nombre de l'entier n sans passer nécessairement par l'orbitalisation.

je propose ici un algorithme heuristique pour reconstituer les mots-nombres en passant par la table de répartition des effecteurs par entier (voir page 45) et en s'aidant du dictionnaire. l'exercice va porter sur un exemple simple mais non trivial : soit à constituer le mot-nombre 4.

1°) j'écris la pseudo-pascale de 4, soit 233,

2°) conformément à la pseudo-pascale, je projette dans la table des puissances les effecteurs correspondants :

p =	2	3	4
	φ	α	2φ
	Σ	φid	$\varphi\Sigma$
		(α)	αid

ou (φid) en puissance 3 il n'existe que deux effecteurs, α et φid; comme la pseudo-pascale de 4 indique qu'il en faut 3; l'un des deux doit donc être redoublé.

3°) quel que soit le mot-nombre, une orbitale, w_0, comporte toujours la séquence de couplage $\Sigma\varphi$.

le dictionnaire nous indique que φ génère Σ et α, or Σ est exclus sinon nous retrouverions 2 et non 4; donc le couplage initial est $\Sigma\varphi\alpha$ (qui est d'ailleurs le couplage "initial" de toute orbitale w_0 de tout entier ≥ 2) et le quatrième terme est soit 2φ soit φid.

Σ n'est utilisé qu'une fois dans l'analyse, ce qui nous permet de ne plus le répéter une fois utilisé, c'est pourquoi on commence par l'orbitale w_0 qui est seule à le contenir.

4°) formons le schéma des générations pour 4, nous excluons donc tous les effecteurs de puissance supérieure à 4 :

$$\begin{tikzcd}
\Sigma \arrow[d] \arrow[r, phantom, shift right=4ex, "\circlearrowleft"] & 2\varphi \arrow[l, dashed] & \\
\varphi \arrow[r, dashed] & \alpha \arrow[u] \arrow[dr] & \\
\varphi\Sigma \arrow[ur] \arrow[rr, phantom, "\circlearrowright"] & & \varphi id \arrow[dl] \\
& \alpha id \arrow[ul] &
\end{tikzcd}$$

nous voyons se dessiner "naturellement" les deux mots-nombres partiels, c'est-à-dire les deux orbitales de l'orbite de W_4 : $\Sigma\varphi\alpha(2\varphi)$ et $\alpha(\varphi id)(\alpha id)(\varphi\Sigma)$, qui peuvent être dites topologiquement d'orientations inverses, avec α comme effecteur jointif.

ce qui remplit bien le "cahier des charges" de la pseudo-pascale.

une formule explicite pour les fibonacci pairs F_{2n}.(voir p12)

1 – un entier n
2 – l'ensemble K_n des classes nappées de n, de 1 à s(n)
3 – les sous-classes Q_i de K_n, $Q_i \subset K_n$ et $Q_i \neq 0$
4 – les cœfficients q_i des sous-classes Q_i
5 – les produits $Q_i \times q_i$
6 – la somme $\sum Q_i \times q_i = \mathrm{couv}(n) = F_{2n}$, encore appelée polynôme nappé de n.

exemple. 1 – n = 7 et couv(7) = $F_{2\times 7} = F_{14}$.
2 – 7 est de la forme 3k + 1 donc s(7) = 3 x 4 = 12
3 – 1{[1^7]×1}, 2{[1^5, 2]×6}, 3{[1^4, 3]×5}, 4{[1^3, 4]×4, [1^3, 2^2]×10}, 5{[1^2, 5]×3}, 6{[1^2, 2, 3]×12, [1, 6]×2}, 7{[7]×1}, 8{[1, 2, 4]×6, [1, 2^3]×4}, 9{[1, 3^2]×3}, 10{[(2, 5]×2}, 12{[3, 4]×2, [2^2, 3]×3}.
4, 5 et 6 – le polynôme nappé de 7 est :
1 x 1 + 2 x 6 + 3 x 5 + 4 x (4 + 10) + 5 x 3 + 6 x (12 + 2) + 7 x 1 + 8 x (6 + 4) + 9 x 3 + 10 x 2 + 0 + 12 x (2 + 3) = 1 + 12 + 15 + 56 + 15 + 84 + 7 + 80 + 27 + 20 + 0 + 60 = 377 = F_{14}. qu'on peut écrire en réduction en ne faisant apparaitre que les cœfficients dans l'ordre : pol(7) = 1 6 5 14 3 14 1 10 3 2 0 5

polynômes nappés de 1 à 7 (j'omets les signes +) :

pol(1) = 1 = 1
pol(2) = 1 2 = 3
pol(3) = 1 4 3 = 8
pol(4) = 1 6 6 8 = 21
pol(5) = 1 8 9 20 5 12 = 55
pol(6) = 1 10 12 36 10 42 0 24 9 = 144.
pol(7) = 1 12 15 56 15 84 7 80 27 20 0 60 = 377

polynômes réduits correspondants où l'on constate que $\sum c_{n,i} = 2^{n-1} = P_n$, ce qui est une autre forme de la table de pascal.

K_n et Q_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1::	1											
2::	1	1										
3::	1	2	1									
4::	1	3	2	2								
5::	1	4	3	5	1	2						
6::	1	5	4	9	2	7	0	3	1			
7::	1	6	5	14	3	14	1	10	3	2	0	5

liste des suites répertoriées sur oeis

$f(n+1) = n + f(n)$ (p12); elle génère les deux suites, avec $f(n_0) = n_0$.
$f(2) = 2$, soit A002378 : 2 4 6 8 10 12 14 16 18 20…
↗↓ ↗↓ ↗↓ ↗...
f_{pair} : 2 6 12 20 30 42 56 72 90 110…suite $n(n+1)$
et $f(1) = 1$, soit A000290 1 3 5 7 9 11 13 15 17 19 21…
↗↓ ↗↓ ↗ ↓
f_{impair} 1 4 9 16 25 36 49 64 81 100 121… suite des carrés.
leur fusion donne la suite A002620.

A000784 (p33) la division du cercle avec n cordes est donnée par la formule, n> 0 :
$Q_n = ½n(n + 1) + 1$. or $2\delta_n = n + 1$, d'où $Q_n = n\delta_n + 1$. et $Q_{n+1} = Q_n + (n + 1) = \delta_n(n + 2) +1$
"Q_n régions 1 2 4 7 11.. etc.
as central polyg. numb. (the lazy contour' sequence))

A000931 (p56)
"1 2 2 3 4 5 7 9 12 16 21 28 37 49 65 86 114 151 changent avec λ.
cette séquence n'est autre que la suite de "padovan".

A001787 (pp61-62) "l'expansion d'un entier n est donnée par
$ex(n) = n \times 2^{n-1}$ $\Sigma ex(n_k) = n_1 2^{n_1-1} + n_2 2^{n_2-1} + \ldots + n_k 2^{n_k-1} = \Sigma n_k 2^{n_k-1}$.
la suite des 10 premiers termes est : 1 4 12 32 80 192 448 1024 2304 5120 dont la somme cumulée est 1 5 17 49 129 321 769 1793 4097 9217."

A001792 et A045626 (p28)
"cette suite 1, 2, 5, 12, 28, etc. est la suite n = $(S_n – S_{n-1})$ ₪ n - 1. par exemple : la suite $S_7 = (S_7 – S_6)$ ₪ S_6, soit (256 – 112 = 144) ₪ 64;28;12;5;;2;1 c'est-à-dire S_7 = 144; 64; 28; 12; 5; 2; 1".

A002061 (p33) (-central polygonals numbers)" $S^2_q/2^{2q-4} – q = q^2 + q + 1 = P^{(q)}$.
table des premières valeurs de S_q et de $P^{(q)}$ avec $q \geq 2$.

q =	2	3	4	5	6	7…
S_q =	3	8	20	48	112	256…
$P^{(q)}$	7	13	21	31	43	57

A049610 et A168150 (p24) $S_n = 2S_{n-1} + 2^{n-2} = 2(S_{n-1} + 2^{n-3})$ avec $S_1 = 1$. par ex. S_6 = 2(48 + 8) = 112, etc. ce qui donne la suite S_n

S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	S_9	S_{10}	etc…
1	3	8	20	48	112	256	576	1280	2816	etc"

A080956 (p5). $f(n+1) = n + f(n)$ avec $f(0) = -1$; d'où la suite

0	1	2	3	4	5	6	7	etc
-1	-1	0	2	5	9	14	20…etc	

par exemple, $f(6) = 5 + f(5) = 5 + 9 = 14$.
sur oeis, donnée sous forme inversée −A080956, avec la relation $(n+1)x(2-n)/2$, pour les cœfficients de x dans le polynôme $C(n, 0)+C(n+1, 1)x+C(n+2, 2)x(x-1)/2$.

sommaire du 1er texte.